BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ENRICO DUCCI

Sulla deduzione immediata, da formule goniometriche, di relazioni per i poligoni regolari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.4, p. 230–232.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_4_230_0>

Sulla deduzione immediata, da formule goniometriche, di relazioni per i poligoni regolari.

Nota di ENRICO DUCCI (a Napoli).

Sunto. - *Dalle relazioni fra due o tre delle sei funzioni* sen x, cos x, tg x, sen $\frac{x}{2}$, cos $\frac{x}{2}$, tg $\frac{x}{2}$ *si deducono immediatamente delle relazioni fra elementi di poligoni regolari inscritti e circoscritti nel circolo di raggio uno.*

1. Il campo delle matematiche elementari offre ancora una messe, che, saggiamente raccolta, può apportare notevole contributo alla scienza e riescire di vantaggio ai discenti ed ai docenti delle scuole medie. Ne abbiamo dato una prova col rilevare nei nn.i 1 e 3, a. XIII di questo « Bollettino », le due notevoli relazioni

$$l_n L_n^{(1)} L_n^{(2)} \dots L_n^{\left(\frac{n-3}{2}\right)} = \sqrt{n}, \qquad l_n + L_n^{(1)} + L_n^{(2)} + \dots + L_n^{\left(\frac{n-3}{2}\right)} = \cot \frac{90^\circ}{n}$$

fra i lati dei poligoni regolari di n lati, convesso e stellati, inscritti nel circolo di raggio *uno*, quando n è primo. Adesso facciamo vedere che, se abbiamo una relazione fra due o tre delle sei funzioni $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{sen}\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, sostituendo in essa a dette funzioni rispettivamente $\frac{1}{2} l_n$, a_n, $\frac{1}{2} l'_n$, $\frac{1}{2} l_{2n}$, a_{2n}, $\frac{1}{2} l'_{2n}$, scaturisce una corrispondente relazione fra due o tre delle sei quantità l_n, a_n, l'_n, l_{2n}, a_{2n}, l'_{2n}; e ciò in virtù delle formule

$$2 \operatorname{sen} \frac{180^\circ}{n} = l_n, \qquad \cos \frac{180^\circ}{n} = a_n, \qquad 2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} = l'_n,$$

essendo l_n, a_n, l'_n il lato e l'apotema del poligono regolare di n lati inscritto ed il lato del poligono simile circoscritto nel circolo di raggio *uno*.

ESEMPI. — I) Si voglia la relazione razionale fra l_n ed l_{2n}. Dobbiamo all'uopo trovare quella razionale fra $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{sen}\frac{x}{2}$: questa è

$$\operatorname{sen}^2 x = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}\left(1 - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}\right).$$

Sostituendo $\frac{1}{2} l_n$ al posto di $\operatorname{sen} x$ ed $\frac{1}{2} l_{2n}$ in luogo di $\operatorname{sen}\frac{x}{2}$, essa diviene

$$l^2_n = l^2_{2n}(4 - l^2_{2n});$$

ossia, se r e non *uno* è il raggio del circolo,

$$l^4_{2n} - 4r^2 \cdot l^2_{2n} + r^2 l^2_n = 0,$$

da cui si ricava

$$l_{2n} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2r(2r + l_n)} - \sqrt{2r(2r - l_n)}\right],$$

la quale ci permette di calcolare l_{2n} quando conosciamo l_n ed il raggio del circolo circoscritto.

II) Si desideri la relazione fra l'_n ed l'_{2n}. Trovata quelta fra $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, che è

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

si cangino $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ in $\frac{1}{2} l'_n$ ed in $\frac{1}{2} l'_{2n}$, ottenendo così, se r è il raggio del circolo inscritto,

$$l'_n(4r^2 - l'^2_{2n}) = 8r^2 l'_{2n},$$

la quale, noti l'_n ed r, offre per determinare l'_{2n} l'equazione di 2° grado

$$l'_n \cdot l'^2_{2n} + 8r^2 \cdot l'_{2n} - 4r^2 l'_n = 0,$$

da cui si deduce

$$l'_{2n} = \frac{2r}{l'_n}\left(-2r + \sqrt{4r^2 + l'^2_n}\right).$$

III) Ci occorra la relazione fra l_n, a_n ed l'_{2n}. Scritta quella fra $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ e $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, che è

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x},$$

cangiamo $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ in $\frac{1}{2} l_n$, a_n, $\frac{1}{2} l'_{2n}$; e, se al solito r è il raggio del circolo, otteniamo

$$r l_n = l'_{2n}(r + a_n).$$

2. Delle *quindici* combinazioni due a due fra le sei quantità l_n, a_n, l'_n, l_{2n}, a_{2n}, l'_{2n} possiamo omettere le tre seguenti (l_{2n}, a_{2n}),

(l_{2n}, l'_{2n}), (a_{2n}, l'_{2n}) poichè per esse otteniamo le stesse formule che si hanno per le combinazioni analoghe (l_n, a_n), (l_n, l'_n), (a_n, l'_n). Esponiamo ora il quadro delle formule che si hanno per tutte e dodici le combinazioni binarie rimanenti, supponendo al solito sia r il raggio del circolo e scrivendo a sinistra le formule goniometriche generatrici :

combinazione	formula goniometrica generatrice	formula corrispondente per i poligoni
l_n, a_n	$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$	$l^2_n + 4a^2_n = 4r^2$
l_n, l'_n	$\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = 1$	$\dfrac{1}{l^2_n} - \dfrac{1}{l'^2_n} = \dfrac{1}{4r^2}$
l_n, l_{2n}	$\operatorname{sen}^2 x = 4 \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}\left(1 - \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}\right)$	$r^2 l^2_n = l^2_{2n}(4r^2 - l^2_{2n})$
l_n, a_{2n}	$\operatorname{sen}^2 x = 4 \cos^2 \dfrac{x}{2}\left(1 - \cos^2 \dfrac{x}{2}\right)$	$r^2 l^2_n = 16a^2_{2n}(r^2 - a^2_{2n})$
l_n, l'_{2n}	$\operatorname{sen} x = \dfrac{2 \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}}$	$l_n = \dfrac{8r^2 l'_{2n}}{4r^2 + l'^2_{2n}}$
a_n, l'_n	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$a^2_n(4r^2 + l'^2_n) = 4r^4$
a_n, l_{2n}	$2 \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2} = 1 - \cos x$	$l^2_{2n} = 2r(r - a_n)$
a_n, a_{2n}	$2 \cos^2 \dfrac{x}{2} = 1 + \cos x$	$2a^2_{2n} = r(r + a_n)$
a_n, l'_{2n}	$\cos x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}}$	$a_n = \dfrac{r(4r^2 - l'^2_{2n})}{4r^2 + l'^2_{2n}}$
l'_n, l_{2n}	$\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{4 \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}\left(1 - \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}\right)}{\left(1 - 2 \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}\right)^2}$	$l'^2_n = \dfrac{4r^2 l^2_{2n}(4r^2 - l^2_{2n})}{(2r^2 - l^2_{2n})^2}$
l'_n, a_{2n}	$\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{4 \cos^2 \dfrac{x}{2}\left(1 - \cos^2 \dfrac{x}{2}\right)}{\left(2 \cos^2 \dfrac{x}{2} - 1\right)^2}$	$l'^2_n = \dfrac{16r^2 a^2_{2n}(r^2 - a^2_{2n})}{(2a^2_{2n} - r^2)^2}$
l'_n, l'_{2n}	$\operatorname{tg} x = \dfrac{2 \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}}$	$l'_n(4r^2 - l'^2_{2n}) = 8r^2 l'_{2n}$.