BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

CARLO EMILIO BONFERRONI

Sulla validità dei teoremi della media nel Calcolo integrale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.4, p. 225–229.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_4_225_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1934.

Sulla validità dei teoremi della media nel Calcolo integrale.

Nota di C. BONFERRONI (a Firenze).

Sunto. - *L'A. mostra che ipotesi diverse da quelle ordinariamente formulate consentono di applicare ad un integrale di* RIEMANN *i teoremi della media parziale e della media di* BONNET, *e, ad un integrale di* STIELTJES, *il teorema della media.*

Mi propongo di indicare come alcune note relazioni fra integrali e valori medi delle funzioni sottoposte all'operazione d'integrazione, continuino a valere quando, non verificandosi le condizioni ordinariamente enunciate, ne siano verificate altre. Mi induco a pubblicare questa breve Nota, sia perchè i risultati possono riuscire di qualche utilità a chi debba operare con integrali, sia perchè le relative dimostrazioni sono molto semplici ed elementari.

Anzi, per non venir meno a tale carattere di semplicità, prenderò in considerazione soltanto funzioni di una sola variabile, limitate e integrabili nel senso di RIEMANN o di RIEMANN-STIELTJES, trascurando di proposito la generalizzazione a funzioni non limitate, o sommabili, o integrabili secondo LEBESGUE ed a funzioni di più variabili. Tale generalizzazione, che in alcuni casi si presenta facile, dà luogo a difficoltà specialmente per le funzioni di più variabili. Mi limito, quindi, ad accennare alla possibilità di tali ricerche.

1. **Il teorema della media parziale.** — Se $f(x)$ e $g(x)$ sono limitate e integrabili-Riemann, esiste, sotto certe condizioni, un valore $\bar{f}$, medio fra quelli assunti da $f(x)$ nell'intervallo d'integrazione (ma non necessariamente assunto dalla funzione, se discon-

tinua) e soddisfacente alla

$$(1) \qquad \int_a^b fg\,dx = \bar{f}\int_a^b g\,dx.$$

Per calcolare il primo membro della (1), si può dividere (a, b) in n parti h_i e prendere in h_i un valore medio f_i di $f(x)$ e quel valore medio g_i di $g(x)$ che rende (teorema della media):

$$h_i g_i = \int_{h_i} g\,dx.$$

Ora, tutte le volte che risulti

$$(2) \qquad \Sigma h_i f_i g_i = \lambda \Sigma h_i g_i = \lambda \int_a^b g\,dx$$

con λ valore medio di $f(x)$ in (a, b), basterà far tendere a zero le h_i per ottenere la (1).

La (2) sussiste, ovviamente, quando $g(x)$ non cambia segno (e quindi non cambian segno le g_i e le $h_i g_i$), perchè in tal caso λ è compresa fra la massima e la minima delle f_i: è, questo, il caso ordinariamente considerato. Ma la (2) è valida anche in un altro caso.

Per intanto, suppongo che $f(x)$ non decresca e che, per ogni x di (a, b) sia

$$(3) \qquad 0 \leq \int_a^x g\,dx \leq \int_a^b g\,dx.$$

Posto

$$p_i = h_i g_i = \int_{h_i} g\,dx$$

dico che

$$(4) \qquad f_1 \Sigma p_i \leq \Sigma p_i f_i \leq f_n \Sigma p_i.$$

La prima parte della disuguaglianza equivale a

$$0 \leq \Sigma p_i (f_i - f_1) = \Sigma p_i (f_i - f_{i-1} + f_{i-1} - f_{i-2} + \dots + f_2 - f_1) =$$
$$= (p_2 + \dots + p_n)(f_2 - f_1) + (p_3 + \dots + p_n)(f_3 - f_2) + \dots + p_n (f_n - f_{n-1})$$

la quale è certo soddisfatta, perchè $f_{i+1} - f_i \geq 0$ e, posto $x_i = a + h_1 + \dots + h_i$, perchè

$$p_{i+1} + \dots + p_n = p_1 + \dots + p_n - (p_1 + \dots + p_i) = \int_a^b g\,dx - \int_a^{x_i} g\,dx \geq 0.$$

Analogamente si verifica la seconda parte della (4), utilizzando la prima parte della (3). Se l'integrale di $g(x)$ in (a, b) fosse negativo, basterebbe cambiar segno a $g(x)$, applicare la (1) e cambiar nuovamente segno: in tal caso la condizione per $g(x)$ sarebbe:

$$0 \geq \int_a^x g dx \geq \int_a^b g dx. \tag{3'}$$

Se $f(x)$ non crescesse, basterebbe cambiarla di segno per renderla non decrescente; si applicherebbe poi la (1) e, infine, si tornerebbe a cambiar di segno. Occorre, in breve, che $f(x)$ non cresca, oppure non decresca, cioè, come suol dirsi, che sia funzione monotona o unigrada.

Concludendo: la (1) vale non soltanto quando $g(x)$ non cambia segno (caso ordinario), ma anche quando

$$\begin{cases} f(x) \text{ è funzione unigrada} \\ \int_a^x g dx \text{ è compreso fra } 0 \text{ e } \int_a^b g dx. \end{cases}$$

2. **Il teorema della media per l'integrale di Stieltjes.** — Se $f(x)$ è integrabile-Stieltjes rispetto a $g(x)$ e se questa funzione vale A, B agli estremi di (a, b), sotto certe condizioni è

$$\int_a^b f dg(x) = (B - A)\bar{f} \tag{5}$$

dove $\bar{f}$ è un valore medio di $f(x)$ in (a, b). Diviso l'intervallo in n parti h_i e detti x_{i-1}, x_i gli estremi di h_i, occorre formare anzitutto

$$\Sigma p_i f_i\,; \quad [p_i = g(x_i) - g(x_{i-1})]$$

essendo f_i un valore medio di $f(x)$ in h_i: quando sia

$$\Sigma p_i f_i = \lambda \Sigma p_i = \lambda(B - A) \tag{6}$$

con λ medio di $f(x)$ in (a, b), si otterrà, al limite, la (5). Intanto, la (6) vale quando le p_i non cambian segno, cioè quando $g(x)$ è unigrada, come d'ordinario si ammette; ma si può anche supporre che sia unigrada la $f(x)$ e che risulti (n. 1):

$$\begin{array}{lll} p_1 + \dots + p_i & \text{compreso fra} & 0 \text{ e } B - A, \text{ cioè} \\ g(x_i) - A & \quad » \quad\quad » & 0 \text{ e } B - A, \quad » \\ g(x_i) & \quad » \quad\quad » & A \text{ e } B. \end{array}$$

Basta dunque supporre che $g(x)$, per ogni x, sia compresa fra i valori estremi A, B.

Se $f(x)$ è integrabile-Stieltjes rispetto a $g(x)$, si può, in conclusione, affermare che la (5) vale non solo quando $g(x)$ è unigrada (caso ordinario), ma anche quando

$$\begin{cases} f(x) \text{ è funzione unigrada} \\ g(x) \text{ è compresa fra } g(a) \text{ e } g(b). \end{cases}$$

3. **Il teorema della media di Bonnet.** — Se $f(x)$, $g(x)$ sono integrabili-Riemann e se $g(x)$ è compresa, nell'intervallo (a, b), fra A e B, vale, sotto certe condizioni, la formula

$$\int_a^b fg dx = A\int_a^\xi f dx + B\int_\xi^b f dx \qquad (a \leq \xi \leq b). \tag{7}$$

Si cominci a supporre $A = g(a)$, $B = g(b)$. Per calcolare il primo membro della (7), si divida (a, b) in parti h_i e si prenda in h_i il valore $g(x_{i-1})$ e quel valore medio f_i di $f(x)$ che rende

$$h_i f_i = \int_{h_i} f dx = F(x_i) - F(x_{i-1})\,; \quad \left[F(x) = \int_a^x f(x) dx,\ F(a) = 0\right].$$

Si tratta, dunque, di studiare il limite di

$$\Sigma h_i f_i g(x_{i-1}) = \Sigma\, g(x_{i-1})[F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

L'identità

$$\Sigma\, g(x_{i-1})[F(x_i) - F(x_{i-1})] + \Sigma F(x_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] =$$
$$= BF(b) - AF(a) = B\int_a^b f dx$$

consente di scrivere la precedente sotto la forma [posto $p_i = g(x_i) - g(x_{i-1})$]:

$$\Sigma h_i f_i g(x_{i-1}) = B\int_a^b f dx - \Sigma F(x_i) p_i. \tag{8}$$

Ogniqualvolta risulti

$$\Sigma F(x_i) p_i = \lambda \Sigma p_i = \lambda(B - A) \tag{9}$$

con λ medio di $F(x)$ in (a, b), cioè della forma (notando che F è funzione continua):

$$F(\xi) = \int_a^\xi f dx, \qquad (a \leq \xi \leq b)$$

la (8), al limite, darà

$$\int_a^b fg\,dx = B\int_a^b f\,dx - (B-A)\int_a^\xi f\,dx \tag{7'}$$

cioè la (7). Ora, la (9) sussiste quando le p_i non cambiano segno, cioè quando $g(x)$ è unigrada, secondo l'ipotesi ordinariamente formulata; ma anche quando è unigrada la $F(x)$ e quando $g(x_i)$ è compresa fra A e B, cioè quando è tale $g(x)$. È anche da notare che, cambiando A e B in modo che $g(x)$ non perda la necessaria proprietà, l'integrale (di Riemann) a primo membro della (7) non muta, perchè non ha effetto l'alterazione di due sole ordinate.

Quindi, possiamo concludere che la (7) vale non solo quando $g(x)$ è funzione unigrada ed è compresa fra A e B (caso ordinario, intendendo che sia $A \leq B$ se $g(x)$ non decresce, $A \geq B$ se non cresce), ma anche quando

$$\begin{cases} \displaystyle\int_a^x f\,dx \text{ è funzione unigrada di } x \\ g(x) \text{ è compresa fra } A \text{ e } B. \end{cases}$$

In questo caso la $f(x)$ deve avere integrale positivo (o nullo) in ogni parte di (a, b), oppure integrale negativo (o nullo); condizione che si può esprimere brevemente dicendo che $f(x)$ dev' essere *prevalentemente* positiva, o prevalentemente negativa, nell'intervallo (a, b).

4. Nel caso ordinario, supposta $g(x)$ positiva, si può porre $B = 0$ se essa non cresce, $A = 0$ se non decresce, ottenendo in corrispondenza (Bonnet)

$$\int_a^b fg\,dx = A\int_a^\xi f\,dx\,; \quad \int_a^b fg\,dx = B\int_\xi^b f\,dx. \tag{10}$$

Nell'altro caso, quando $g(x)$ non muti segno si può annullare indifferentemente A oppure B ottenendo formule analoghe. Da queste, inversamenre, si deduce con noto procedimento la (7), la quale, pertanto, non è che una forma (di Weierstrass) del teorema di Bonnet.

Quando l'integrale di f in (a, x) sia integrabile-Stieltjes rispetto a $g(x)$, una semplice integrazione (di Stieltjes) per parti permette di scrivere subito la (7') e quindi la (7).