Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Giuseppe Belardinelli

Equazioni differenziali normali di ordine infinito

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.4, p. 222–225.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_4_222_0>

Equazioni differenziali normali di ordine infinito.

Nota di GIUSEPPE BELARDINELLI (a Milano).

Sunto. - *L'A. in questa Nota prosegue lo studio di alcuni tipi di equazioni differenziali di ordine infinito. Pone in relazione queste classi di equazioni con gli operatori normali di* PINCHERLE *e con particolari serie di potenze, ove i coefficienti soddisfano ad una relazione lineare ricorrente di ordine finito con coefficienti sviluppabili in serie convergenti di interpolazione di* NEWTON.

1. In una Nota precedente [1] abbiamo considerato particolari equazioni differenziali di ordine infinito

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n x) x^n \frac{d^n y}{dx^n} = 0, \tag{1}$$

equazioni che abbiamo chiamato *ipergeometriche di ordine infinito*. I coefficienti a_n e b_n sono rispettivamente le funzioni interpolari di due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x-1)$, che abbiamo supposto ammettano

[1] « Boll. Un. Mat. Ital. », anno XII, n. 3.

sviluppi convergenti in serie classiche di interpolazione di NEWTON, cioè:

$$(2)\qquad \begin{cases} \varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_n x(x-1)\dots(x-m+1), \\ \psi(x-1) = \sum_{m=0}^{\infty} b_n x(x-1)\dots(x-m+1). \end{cases}$$

Le serie

$$(3)\qquad y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

ove

$$(4)\qquad \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\varphi(n)}{\psi(n)},$$

sono integrali del tipo (1) di equazioni differenziali, serie che abbiamo chiamato *ipergeometriche di ordine infinito.*

2. Consideriamo ora le serie

$$(5)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

ove i coefficienti soddisfano alla relazione ricorrente

$$(6)\qquad c_{n+r}\varphi_r(n) + c_{n+r-1}\varphi_{r-1}(n) + \dots + c_{n+s}\varphi_s(n) + \dots + c_n\varphi_0(n) = 0.$$

Sulle funzioni $\varphi_s(x)$, $(s = 0, 1, \dots, r)$, facciamo le seguenti ipotesi:

a) che almeno una delle funzioni $\varphi_s(x)$ non sia un polinomio, in x;

b) che le funzioni $\varphi_s(x)$ siano sviluppabili in serie di interpolazione di NEWTON con ascissa di convergenza finita, e precisamente si abbia:

$$(7)\qquad \varphi_s(x-s) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{s,m} x(x-1)\dots(x-m+1),$$

da cui

$$(8)\qquad \varphi_s(n-s) = \sum_{m=0}^{n} a_{s,m} n(n-1)\dots(n-m+1), \qquad (s = 0, 1, \dots, r).$$

I coefficienti $a_{s,m}$ si possono calcolare facilmente.

Le serie (7) avranno semipiani di convergenza ed al di fuori di questi semipiani potremo asserire che saranno convergenti per valori interi positivi di x, che, eventualmente, risultassero esterni a questi semipiani. Si avrà

$$(9)\qquad x^n\varphi_s(n-s) = a_{s,0}x^n + a_{s,1}x\frac{d}{dx}x^n + \dots + a_{s,n}x^n\frac{d^n}{dx^n}x^n,$$

$$(s = 0, 1, \dots, r),$$

somme parziali di serie convergenti e, per ogni n, nel semipiano comune di convergenza, si ha:

(10) $$x^{n+r}[c_{n+r}\varphi_r(n) + c_{n+r-1}\varphi_{r-1}(n) + \dots + c_n\varphi_0(n)] =$$
$$= a_{r,0}c_{n+r}x^{n+r} + a_{r,1}x\frac{d}{dx}c_{n+r}x^{n+r} + \dots + a_{r,n}x^n\frac{d^n}{dx^n}c_{n+r}x^n +$$
$$+ x\left(a_{r-1,0}c_{n+r-1}x^{n+r-1} + a_{r-s,1}\frac{d}{dx}c_{n+r-1}x^{n+r-1} + \dots + a_{r-1,n}x^n\frac{d^n}{dx^n}c_{n+r-1}x^n\right) +$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ x^r\left(a_{0,0}c_nx^n + a_{0,1}x\frac{d}{dx}c_nx^n + \dots + a_{0,n}x^n\frac{d^n}{dx^n}c_nx^n\right).$$

Essendo $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ e per ogni n, verificata la (6), avremo:

(11) $$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{r,n} + a_{r-1,n}x + \dots + a_{0,n}x^r)x^n\frac{d^ny}{dx^n} = 0.$$

Chiameremo la (11) equazione *differenziale normale di rango* r *di ordine infinito.*

Le equazioni differenziali normali di rango uno sono le equazioni differenziali ipergeometriche di ordine infinito introdotte nella Nota precedente.

Le serie di potenze (3) sono integrali regolari nell'intorno della origine delle equazioni differenziali (11).

3. Chiamansi col PINCHERLE operatori normali di rango r gli operatori definita dalla relazione:

(12) $$A(x^n) = \gamma_nx^n + \gamma_{n-1}x^{n-1} + \dots + \gamma_{n+r}x^{n+r},$$

avremo che il primo membro della (11), cioè l'operatore differenziale:

(13) $$A(y) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_{r,n} + a_{r-1,n}x + \dots + a_{0.n}x^r)x^n\frac{d^ny}{dx^n},$$

è un'operatore normale di rango r, e si ha:

(14) $$A(x^n) = x^n\varphi_r(n-r) + x^{n+1}\varphi_{r-1}(n-r+1) + \dots + x^{n+r}\varphi_0(n).$$

L'operatore duale della (13), cioè l'operatore che trasforma i coefficienti generici di una serie di potenze è

(15) $$\bar{A}(c_n) = c_{n+r}\varphi_r(n) + \dots + c_n\varphi_0(n).$$

Le serie (5) ove i coefficienti soddisfano alla (6) e nelle ipotesi *a)* e *b)* caratterizzano l'operatore A^{-1}.

Le serie ipergeometriche di GOURSAT, le serie ipergeometriche di ordine infinito e quelle ora introdotte, sono serie di potenze integrali nell'intorno dell'origine della classe di equazioni differenziali normali di rango r di ordine infinito. Questa denominazione è giustificata in quanto queste forme differenziali sono operatori normali di PINCHERLE di rango r.

Infine desideriamo notare l'intima connessione fra queste equazioni differenziali di ordine infinito e la sviluppabilità di funzioni in serie classiche di interpolazione di NEWTON per modo che a sviluppi in serie di interpolazione potremo associare equazioni differenziali di ordine infinito e viceversa.