Antonio Mambriani

Sulla derivazione di ordine superiore delle funzioni composte. Nota 1ª

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.4, p. 217–222.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_4_217_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1934.

Sulla derivazione di ordine superiore delle funzioni composte.

Nota 1ª di ANTONIO MAMBRIANI (a Bologna).

Sunto. - *Continuando gli studi dei professori* E. PASCAL *ed* U. AMALDI, *si dànno diverse espressioni effettive per le derivate di ordine superiore delle funzioni composte con quante si vogliono variabili sia intermedie che indipendenti.*

Il prof. ERNESTO PASCAL in una notevole Memoria (¹), sulla teoria delle forme differenziali di ordine e di grado qualunque, ha studiato incidentalmente l'algoritmo della derivazione successiva di una funzione composta $f(y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n))$, con uguale numero di funzioni intermedie e di variabili indipendenti. Il Pascal ha osservato che si può porre in generale:

$$(1) \qquad \frac{\partial^r f}{\partial x_{h_1} \dots \partial x_{h_r}} = \sum_{\mu=1}^{r} \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_\mu=1}^{n} \frac{\partial^\mu f}{\partial y_{j_1} \dots \partial y_{j_\mu}} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_\mu \\ h_1 \dots h_r \end{pmatrix}_{xy},$$

dove il simbolo $\begin{pmatrix} j_1 \dots j_\mu \\ h_1 \dots h_r \end{pmatrix}_{xy}$ rappresenta una certa somma di prodotti di derivate delle $y_1, \dots, y_n$, e ha studiato le leggi ricorrenti e le proprietà di tale simbolo.

Diversi anni dopo, il prof. UGO AMALDI ha sviscerato (²) l'algoritmia della derivazione successiva di una funzione composta del tipo più generale,

$$(2) \qquad f(y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m))$$

(¹) E. PASCAL, *La teoria delle forme differenziali di ordine e grado qualunque*, « Memorie R. Acc. Lincei », serie V, Classe scienze fisiche, matematiche e naturali, vol. VIII (1909-10), cfr. § 7. Vedasi anche dello stesso Autore: *Su di un invariante simultaneo di una espressione ai differenziali totali di ordine qualunque e di un'altra alle derivate parziali*, « Rend. Ist. Lomb. », serie II, tomo 35 (1902), pp. 691-700; diverse Note nei « Rend. R. Acc. Lincei », vol. XII (1903); *Sulla nuova teoria delle forme differenziali di ordine e grado qualunque*, « Atti IV Congresso internazionale dei Matematici del 1908 », vol. II (pp. 138-143), Roma, 1909.

(²) U. AMALDI, *Sulle derivate successive delle funzioni composte di quante si vogliono variabili*, « Rend. Circolo Matem. Palermo », tomo XLII (1917), pp. 94-115; *Forme isobariche e cambiamenti di variabile*, « Giornale di Matem. di Battaglini », vol. LVI-9º della 3ª serie (1918), pp. 1-41. La prima di queste due Memorie risolve completamente il problema della derivazione successiva delle funzioni composte e fu redatta dall'AMALDI senza conoscere ancora gli studi del PASCAL.

(con m e n interi positivi qualsiasi). L'Amaldi ha notato dapprima che si può scrivere in generale:

$$(3)\qquad \frac{\partial^{s_1+\dots+s_m}f}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_m^{s_m}}=\sum_{\alpha}\frac{s_1!\dots s_m!}{\alpha_1!\dots\alpha_n!}\,\frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}f}{\partial y_1^{\alpha_1}\dots\partial y_n^{\alpha_n}}\,H^{\alpha_1,\dots,\,\alpha_n}_{s_1,\dots,\,s_m},$$

dove la sommatoria va estesa a tutti i possibili sistemi di n numeri interi positivi o, in parte, nulli, $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, tali che sia

$$0<\alpha_1+\dots+\alpha_n\leq s_1+\dots+s_m,$$

e dove il simbolo $H^{\alpha_1,\dots,\,\alpha_n}_{s_1,\dots,\,s_m}$ (3) rappresenta una certa funzione razionale intera delle derivate di $y_1,\dots,y_n$. L'Amaldi, poi, fondandosi su alcune relazioni ricorrenti pel simbolo $H^{\alpha_1,\dots,\,\alpha_n}_{s_1,\dots,\,s_m}$ ed applicando la « teoria della partizione simultanea di un sistema di più numeri » (o Calcolo isobarico multiplo), ha mostrato chiaramente come si calcolano i vari termini di H, ponendo in evidenza che, dal punto di vista combinatorio, il grado di difficoltà della derivazione successiva delle funzioni composte dipende dal numero delle variabili indipendenti, non da quello delle funzioni intermedie.

Successivamente il prof. GIUSEPPE USAI ha fatto (4) un interessante raffronto fra i simboli del Pascal e dell'Amaldi; ha osservato che la formula (1) del Pascal ha una portata maggiore di quella prima supposta, essa vale, cioè, anche per una funzione composta (2) di quante si vogliano variabili sia intermedie che indipendenti; e ha posto in evidenza fra i detti simboli il legame:

$$(4)\qquad \mu!\begin{pmatrix} j_1\dots j_\mu\\ h_1\dots h_r\end{pmatrix}_{xy}=s_1!\dots s_m!\,H^{\alpha_1,\dots,\,\alpha_n}_{s_1,\dots,\,s_m}$$

$$(1\leq\mu\leq r,\ r=s_1+\dots+s_m,\ \mu=\alpha_1+\dots+\alpha_n).$$

Dopo questi studi, una domanda viene spontanea: *È possibile*

(3) Si è scritto $H^{\alpha_1,\dots,\,\alpha_n}_{s_1,\dots,\,s_m}$ in luogo di $H^{s_1,\dots,\,s_m}_{\alpha_1,\dots,\,\alpha_n}$, come mostra di preferire l'AMALDI nel secondo lavoro citato in (2) (cfr. in tale lavoro i richiami (8) e (18)): l'opportunità, del resto, apparirà chiaramente anche dalle nostre considerazioni.

(4) G. USAI, *Relazioni tra i simboli del Pascal e i simboli dell'Amaldi nella teoria delle derivate di ordine superiore delle funzioni composte*, « Giornale di Matem. di Battaglini », vol. LIX-12° della 3ª serie (1921), pp. 3-12.

determinare, pel simbolo del Pascal o dell'Amaldi, espressioni esplicite tali che, sostituendo simili espressioni in (1) *o in* (3), *risultino, per le derivate di ordine superiore di una funzione composta generale* (2), *forme analoghe a quelle che si hanno per le derivate di ordine superiore di una funzione di funzione?*

Oggetto del presente lavoro è di dare una *risposta affermativa* a tale domanda. *Si indicano diverse espressioni pel simbolo dell'Amaldi* (le espressioni analoghe pel simbolo del Pascal si otterranno a mezzo di (4)); sostituendo, poi, tali espressioni in (3), *si ottengono le diverse formule per la derivazione di ordine superiore di una funzione composta generale* (2): una di queste formule non è altro che l'espressione analitica dell'algoritmo combinatorio stabilito dall'Amaldi per la derivazione successiva, e sarà chiamata *formula di Amaldi.* A questi risultati arrivo con rapidità e semplicità applicando la mia *Algebra delle successioni* ([5]).

Il presente lavoro è suddiviso in due Note: in questa Nota 1ª deduco le espressioni di H in simboli dell'Algebra delle successioni, nella Nota 2ª passo alle espressioni in simboli ordinari. Per ragioni di spazio dò solo un cenno delle dimostrazioni e solo alcune indicazioni bibliografiche ([6]), rimandando per maggiori particolari ad un eventuale lavoro più esteso. In ciò che segue si pone, per brevità,

$$\frac{\partial^{s_1+\cdots+s_m}}{\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_m^{s_m}}\, y_\nu = y_\nu^{(s_1,\ldots,\, s_m)} \qquad (\nu = 1,\ldots, m).$$

1. È facile determinare espressioni del simbolo $H^{\alpha_1,\ldots,\,\alpha_n}_{s_1,\ldots,\,s_m}$ dell'Amaldi coi procedimenti dell'Algebra delle successioni: basta, anzitutto, sfruttare il fatto che tale simbolo *non* dipende dalla natura di f come funzione delle variabili $y_1,\ldots, y_n$, e partire da una f forma della $y_1^{p_1}\ldots y_n^{p_n}$ con $p_1,\ldots, p_n$ interi positivi generici.

([5]) A. MAMBRIANI, *Sull'Algebra delle successioni*, « Annali di Matematica pura e applicata », Memoria I, serie IV, tomo VIII (1930), pp. 103-139; Memoria II, serie IV, tomo IX (1931), pp. 25-56.

([6]) Per la *bibliografia* si consulti: E. PASCAL, *Esercizi critici di Calcolo differenziale e integrale*, Milano, Hoepli, 2ª ed. (1909), cfr. pp. 107-108; 3ª ed. (1921), cfr. pp. 110-112. A. VOSS, *Differential-und Integralrechnung*, « Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften », Bd. I, pp. 87-88. U. AMALDI, loc. cit. in ([2]). Nelle mie ricerche ho trovato più di cinquanta lavori sull'argomento, parecchi dei quali saranno citati nella Nota seguente.

a) Si può scrivere (come si motiva subito cogli elementi dell'Algebra delle successioni):

$$\frac{\partial^{s_1+\dots+s_m}}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_m^{s_m}}\left(y_1^{p_1}\dots y_n^{p_n}\right)=$$

$$\left\{\frac{\partial^{s_1+\dots+s_m}}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_m^{s_m}}\left(y_1^{p_1}\dots y_n^{p_n}\right)\right\}\overset{p_1,\dots,p_n}{\bullet}\left\{(-y_1)^{p_1}\dots(-y_n)^{p_n}\right\}\overset{p_1,\dots,p_n}{\bullet}\left\{y_1^{p_1}\dots y_n^{p_n}\right\}$$

dove nel secondo membro si susseguono due moltiplicazioni binomiali multiple di ordine n e di indici $p_1,\dots,p_n$. Sviluppando, in questa identità, l'ultima moltiplicazione binomiale (in base alla sua stessa definizione), si ottiene:

$$\frac{\partial^{s_1+\dots+s_m}}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_m^{s_m}}\left(y_1^{p_1}\dots y_n^{p_n}\right)=$$

$$=\sum_{\alpha_1=0}^{p_1}\dots\sum_{\alpha_n=0}^{p_n}\binom{p_1}{\alpha_1}\dots\binom{p_n}{\alpha_n}y_1^{p_1-\alpha_1}\dots y_n^{p_n-\alpha_n}\,.$$

$$\cdot\left[\left\{\frac{\partial^{s_1+\dots+s_m}}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_m^{s_m}}\left(y_1^{\alpha_1}\dots y_n^{\alpha_n}\right)\right\}\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_n}{\bullet}\left\{(-y_1)^{p_1}\dots(-y_n)^{p_n}\right\}\right],$$

la quale, confrontata con (3), ci dà una prima espressione desiderata:

$$s_1!\dots s_m!\,H_{s_1,\dots,s_m}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}= \tag{5}$$

$$=\left\{\frac{\partial^{s_1+\dots+s_m}}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_m^{s_m}}\left(y_1^{\alpha_1}\dots y_n^{\alpha_n}\right)\right\}\overset{\alpha_1,\dots,\alpha_n}{\bullet}\left\{(-y_1)^{\alpha_1}\dots(-y_n)^{\alpha_n}\right\},$$

dove nel secondo membro figura una moltiplicazione binomiale, multipla di ordine n e di indici $\alpha_1,\dots,\alpha_n$.

b) Procedendo in modo un poco diverso, si ricava invece per H la espressione più estesa (ciò che, del resto, si può fare discendere da (5) mediante convenienti trasformazioni):

$$s_1!\dots s_m!\,H_{s_1,\dots,s_m}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}= \tag{6}$$

$$=\left\{y_1^{(s_1,\dots,s_m)}-y_1\varepsilon_{s_1,\dots,s_m}\right\}^{(\alpha_1)^{s_1,\dots,s_m}}\overset{s_1,\dots,s_m}{\bullet}\dots$$

$$\dots\overset{s_1,\dots,s_m}{\bullet}\left\{y_n^{(s_1,\dots,s_m)}-y_n\varepsilon_{s_1,\dots,s_m}\right\}^{(\alpha_n)^{s_1,\dots,s_m}},$$

dove nel secondo membro compaiono delle moltiplicazioni binomiali multiple di ordine m e di indici $s_1, \ldots, s_m$; ed i successivi fattori si ottengono innalzando alle potenze α_1-esima, ..., α_n-esima binomiale (multipla di ordine m e di indici $s_1, \ldots, s_m$) rispettivamente gli n termini generali, di successioni m-uple,

$$y_1^{(s_1, \ldots, s_m)} - y_1 \varepsilon_{s_1, \ldots, s_m}, \ldots, y_n^{(s_1, \ldots, s_m)} - y_n \varepsilon_{s_1, \ldots, s_m}.$$

Tali successioni m-uple coincidono ordinatamente con quelle di termini generali:

$$y_1^{(s_1, \ldots, s_m)}, \ldots, y_n^{(s_1, \ldots, s_m)},$$

ad eccezione del loro primo elemento che per queste ultime è, ordinatamente, $y_1, \ldots, y_n$, mentre per le precedenti è sempre nullo (essendo $\varepsilon_{s_1, \ldots, s_m} = \varepsilon_{s_1} \ldots \varepsilon_{s_m}$, con $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots = 0$).

2. Facendo intervenire in (5) e (6) i segni di moltiplicazione isobarica, in luogo di quelli di moltiplicazione binomiale, si ha:

$$(5') \qquad \frac{s_1! \ldots s_m!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} H_{s_1, \ldots, s_m}^{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} =$$

$$= \left\{ \frac{\partial^{s_1 + \cdots + s_m}}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_m^{s_m}} \frac{y_1^{\alpha_1} \ldots y_n^{\alpha_n}}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \right\}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \bullet \frac{(-y_1)^{\alpha_1} \ldots (-y_n)^{\alpha_n}}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!},$$

$$(6') \qquad H_{s_1, \ldots, s_m}^{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} =$$

$$= \left\{ \frac{y_1^{(s_1, \ldots, s_m)}}{s_1! \ldots s_m!} - y_1 \varepsilon_{s_1, \ldots, s_m} \right\}^{(\alpha_1)_{s_1, \ldots, s_m}} \underset{s_1, \ldots, s_m}{\bullet} \cdots$$

$$\underset{s_1, \ldots, s_m}{\bullet} \left\{ \frac{y_n^{(s_1, \ldots, s_m)}}{s_1! \ldots s_m!} - y_n \varepsilon_{s_1, \ldots, s_m} \right\}^{(\alpha_n)_{s_1, \ldots, s_m}}.$$

Nella (6′) le derivate delle $y_1, \ldots, y_n$ sono tutte divise pel prodotto dei fattoriali dei rispettivi ordini di derivazione parziale, proprio come figura costantemente nelle considerazioni dell'Amaldi.

3. In virtù della interpretazione delle operazioni binomiali e isobariche mediante le serie, dal metodo, sopra indicato, di deduzione delle nostre formule discende agevolmente *il metodo trascendente, molto laborioso, che si potrebbe seguire per dedurre le formule stesse.*

Le (5′) e (6′) interpretate colle serie dànno, rispettivamente,

$$\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n = 0}^{\infty} H^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}_{s_1, \dots, s_m} \frac{t_1^{\alpha_1}}{\alpha_1 !} \cdots \frac{t_n^{\alpha_n}}{\alpha_n !} =$$

$$= \frac{e^{-(y_1 t_1 + \dots + y_n t_n)}}{s_1 ! \dots s_m !} \frac{\partial^{s_1 + \dots + s_m}}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_m^{s_m}} e^{y_1 t_1 + \dots + y_n t_n},$$

$$\sum_{s_1, \dots, s_m = 0}^{\infty} H^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}_{s_1, \dots, s_m} h_1^{s_1} \dots h_m^{s_m} =$$

$$= [y_1(x_1 + h_1, \dots, x_m + h_m) - y_1(x_1, \dots, x_m)]^{\alpha_1} \cdot \dots$$
$$\cdot [y_n(x_1 + h_1, \dots, x_m + h_m) - y_n(x_1, \dots, x_m)]^{\alpha_n}.$$

Dalle formule (5), (6), (5′), (6′) conseguono, poi, in modo semplice relativamente alla generalità della funzione composta (2) che si considera, cinque tipi di espressioni pel simbolo dell'Amaldi, non contenenti più notazioni dell'Algebra delle successioni: ciò è l'oggetto della prossima Nota 2ª.