Bollettino Unione Matematica Italiana

Giovanni Ricci

Sulla convergenza uniforme delle serie di funzioni seniicontinue

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.4, p. 212–216.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_4_212_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Sulla convergenza uniforme delle serie di funzioni semicontinue.

Nota di GIOVANNI RICCI (a Pisa).

Sunto. - *Si dà una condizione sufficiente perchè una serie convergente di funzioni semicontinue converga uniformemente. Quando in particolare le funzioni siano continue si viene a generalizzare un classico teorema del* DINI.

1. Sia $u_n(x)$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, funzione definita (e finita) in un insieme *chiuso* E. Supponiamo che la serie $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots$ converga in ogni punto x di E e poniamo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad f_k(x) = \sum_{n=1}^{k} u_n(x).$$

Un classico teorema del DINI [1] ci dice: « Se: per $n = 1, 2, 3, \ldots, u_n(x)$ è continua in E, $u_n(x) \geqq 0$ in E, $f(x)$ è continua in E, allora: la serie $u_1(x) + u_2(x) + \ldots$ converge uniformemente in E ».

In questo enunciato la condizione $u_n(x) \geqq 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ in E, apparisce come una condizione sufficiente di tipo unilaterale; essa può essere sostituita da una *condizione necessaria e sufficiente di tipo unilaterale* e procederemo a tale sostituzione nelle righe che seguono.

2. Dimostreremo le tre seguenti proposizioni, delle quali la seconda è immediata conseguenza della prima, in virtù del notis-

[1] Vedere per es. U. DINI, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, Pisa (1878), p. 110. — P. MONTEL, *Sur les suites infinies de fonctions*, « Annales École Normale Supérieure », s. 3ª, t. 24 (1907), ved. pp. 263-264. — C. A. DELL'AGNOLA, *Sulle successioni uniformemente convergenti*, « Atti R. Istituto Veneto », t. 70 (1910-11), pp. 383-391. — H. HAHN, *Theorie der reellen Funktionen*, I Bd., Berlin (1921), p. 284; *Reelle Funktionen: Punktfunktionen*, Leipzig (1932), p. 214. — E. W. HOBSON, *Theory of functions of a real variable*, vol. II, 2ª ed., Cambridge (1926), p. 116.

simo teorema di PINCHERLE–BOREL [1]; nelle prime due si presuppone la sola *semicontinuità* dei termini della serie.

TEOREMA I. — Sia, per $n = 1, 2, 3, \ldots, u_n(x)$ semicontinua inferiormente nel punto ξ di E. Condizione sufficiente perchè la serie $u_1(x) + u_2(x) + \ldots$ (convergente in E) converga uniformemente nel punto ξ è che [2]:

a) la funzione $f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots$ sia superiormente semicontinua in ξ,

b) prefissati arbitrariamente due numeri positivi σ e N, si possa determinare un intero $\nu = \nu(\sigma, N) \geq N$ e un intorno $\Delta \equiv \Delta(\sigma, N)$ del punto ξ (ambedue dipendenti da σ e N) tali che risulti

$$f_\nu(x) < f_n(x) + \sigma < f(x) + 2\sigma,$$

per ogni $n \geq \nu$ e ogni x di $E \cdot \Delta$.

OSSERVAZIONI. — 1) La *b)* è soddisfatta quando è soddisfatta la seguente meno restrittiva:

b') prefissato un numero $\sigma > 0$ arbitrario, si possa determinare un intero $\nu = \nu(\sigma)$ e un intorno $\Delta \equiv \Delta(\sigma)$ del punto ξ (ambedue dipendenti da σ) tali che risulti

$$f_n(x) < f_m(x) + \sigma,$$

per ogni coppia (n, m) con $\nu \leq n \leq m$, e ogni x di $E \cdot \Delta$.

2) Poichè l'uniforme convergenza nel punto ξ della serie $u_1(x) + u_2(x) + \ldots$, i cui termini sono funzioni inferiormente semicontinue, porta come conseguenza che $f(x)$ è semicontinua inferiormente in ξ si conclude che le condizioni *a)* e *b)* sono sufficienti per assicurare la *continuità* di $f(x)$ nel punto ξ.

TEOREMA II. — Sia, per $n = 1, 2, 3, \ldots, u_n(x)$ semicontinua inferiormente nell'insieme chiuso E. Condizione sufficiente perchè la serie $u_1(x) + u_2(x) + \ldots$ (convergente in E) converga uniformemente in E è che:

[1] Vedere per es. U. DINI, *Lezioni di Analisi infinitesimale*, vol. II, Pisa (1915), p. 991. — S. PINCHERLE, *Lezioni di Calcolo infinitesimale*, t. I, 3ª ed., Bologna (1926), p. 61. — L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, vol. I, Bologna (1921), p. 111, ecc. Questo teorema va sotto nomi diversi.

[2] Ricordiamo che la serie $u_1(x) + u_2(x) + \ldots$ convergente nell'insieme E, si dice che converge uniformemente nel punto ξ di E quando prefissato $\sigma > 0$ arbitrario è possibile determinare un intero $\nu(\sigma)$ e un intorno $\Delta(\sigma)$ di ξ (ambedue dipendenti da σ) tali che per ogni $m \geq n \geq \nu(\sigma)$ e ogni x di $E \cdot \Delta(\sigma)$ si abbia $|f_m(x) - f_n(x)| < \sigma$. Un punto isolato di E è da considerarsi come punto di continuità per ogni funzione definita (e finita) in E, e anche come punto di convergenza uniforme, tutte le volte che in esso la serie converge.

c) la funzione $f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots$ sia superiormente semicontinua in E,

d) prefissati arbitrariamente un punto ξ di E e due numeri positivi σ e N, si possa determinare un intero $\nu = \nu(\sigma, N, \xi) \geqq N$ e un intorno $\Delta \equiv \Delta(\sigma, N, \xi)$ del punto ξ (ambedue dipendenti da σ, N, ξ) tali che risulti

$$f_\nu(x) < f_n(x) + \sigma < f(x) + 2\sigma,$$

per ogni $n \geqq \nu$ e ogni x di $E \cdot \Delta$.

Osservazioni. — Valgono le osservazioni analoghe a quelle che seguono l'enunciato del Teorema I; in questo caso *d')* si ottiene dalla *b')* quando prefissato anche ξ si consideri $\nu = \nu(\sigma, \xi)$ e $\Delta \equiv \Delta(\sigma, \xi)$ dipendenti da σ e ξ.

3. Tenendo presenti le definizioni di convergenza uniforme in un punto ξ [in un insieme chiuso E] saremmo portati a chiamare la proprietà espressa in *b')* [in *d')*] *convergenza superiormente semi-uniforme in* ξ [*in* E] e con questa locuzione i teoremi precedenti ci dicono tra l'altro che:

Tutte le volte che i termini di una serie convergente sono funzioni semicontinue inferiormente, la semicontinuità superiore della somma e la convergenza superiormente semiuniforme delle serie, riunite insieme, dànno una condizione sufficiente per la convergenza uniforme della serie stessa.

4. Anzi, per l'uniforme convergenza in tutto un insieme chiuso E di una serie convergente di funzioni *continue*, vale il seguente teorema, nel quale la condizione (necessaria e sufficiente) assume un aspetto analogo a quello della classica condizione di Arzelà per la continuità della somma.

Teorema III. — Sia, per $n = 1, 2, 3, \ldots$, $u_n(x)$ *continua* nell'insieme chiuso E. Condizione necessaria e sufficiente perchè la serie $u_1(x) + u_2(x) + \ldots$ (convergente in E) converga uniformemente in E è che:

c) la funzione $f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots$ sia superiormente semicontinua in E.

e) prefissati arbitrariamente due numeri positivi σ e N (intero) si possa determinare un intero $M = M(\sigma, N) > N$ dipendente da σ e N in guisa che per ogni punto x di E sia soddisfatta almeno una delle $M - N$ condizioni

$$\begin{cases} f_\nu(x) < f_n(x) + \sigma < f(x) + 2\sigma, & \text{per ogni } n \geqq M \\ \nu = N + 1,\ N + 2, \ldots,\ M. \end{cases}$$

Questa è la forma della condizione necessaria e sufficiente di tipo unilaterale di cui parlammo al n. 1, e che risulta soddisfatta nelle ipotesi del teorema del DINI.

5. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA I. — Prefissato $\sigma > 0$ arbitrario determiniamo (in base alla *b)*) un intorno $\Delta(\sigma)$ di ξ e un intero $\mu = \mu(\sigma)$ in guisa da avere

$$f_n(x) < f(x) + \sigma, \tag{1}$$

per ogni $n \geqq \mu$ e ogni x di $E \cdot \Delta(\sigma)$.

D'altronde osserviamo che è per qualunque ν

$$f_n(x) = f(x) - (f(x) - f(\xi)) - (f(\xi) - f_\nu(\xi)) - (f_\nu(\xi) - f_\nu(x)) - \\ - (f_\nu(x) - f_n(x)). \tag{2}$$

Determiniamo un intero $N \geqq \mu(\sigma)$ in guisa da avere

$$f_n(\xi) > f(\xi) - \sigma, \qquad \text{per ogni } n \geqq N. \tag{3}$$

Determiniamo (in base alla *b)*) in corrispondenza ai numeri σ, N un intero $\nu \geqq N$ e un intorno $\Delta'(\sigma, N)$ di ξ tali che

$$f_\nu(x) < f_n(x) + \sigma, \tag{4}$$

per ogni $n \geqq \nu$ e ogni x di $E \cdot \Delta'(\sigma, N)$.

Essendo $f_\nu(x)$ semicontinua inferiormente nel punto ξ e $f(x)$ semicontinua superiormente nel punto ξ, andiamo a determinare un intorno $\Delta''(\sigma)$ di ξ in guisa da avere

$$f(x) < f(\xi) + \sigma, \quad f_\nu(x) > f_\nu(\xi) - \sigma, \tag{5}$$

per ogni x di $E \cdot \Delta''(\sigma)$.

Detto Δ^* l'intorno di ξ che risulta dall'intersezione degl'intorni $\Delta(\sigma)$, $\Delta'(\sigma, N)$ e $\Delta''(\sigma)$ già costruiti e osservato che $\nu \geqq N \geqq \mu$, si conclude che per ogni $n \geqq \nu$ e ogni x di $E \cdot \Delta^*$ valgono simultaneamente le (1), (3), (4) e (5); e per la (2) questo porta

$$f(x) - 4\sigma < f_n(x) < f(x) + \sigma.$$

Ma l'intorno Δ^* dipende soltanto da σ, poichè N dipende soltanto da σ e quindi anche $\Delta'(\sigma, N)$ dipende soltanto da σ; dunque, per definizione, la serie $u_1(x) + u_2(x) + \ldots$ converge uniformemente nel punto ξ di E. Il Teorema I risulta dimostrato.

Poichè, come conseguenza del teorema di PINCHERLE-BOREL sopra citato, la convergenza uniforme in ogni punto ξ di E implica la convergenza uniforme in E, il Teorema II è immediato corollario del Teorema I.

6. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA III. — Che le condizioni *c)* e *e)* siano necessarie è evidente, quindi per dimostrare il Teorema III

basta dimostrare che quando è soddisfatta la condizione *e)* e le funzioni $u_n(x)$ $(n = 1, 2, 3,...)$ sono continue, risulta soddisfatta la condizione *d)*.

Prefissato $\sigma > 0$, determiniamo N abbastanza grande in guisa da avere

$$|f_n(\xi) - f_m(\xi)| < \sigma, \quad \text{per ogni coppia } m \geqq n \geqq N; \tag{6}$$

e (in base alla *e)*) determiniamo l'intero $M = M(\sigma, N)$ in guisa che per ogni punto x di E sia soddisfatta almeno una delle $M - N$ condizioni

$$\begin{cases} f_\nu(x) < f_n(x) + \sigma < f(x) + 2\sigma, & \text{per ogni } n \geqq M \\ \nu = N + 1, \ N + 2, ..., \ M. \end{cases} \tag{7}$$

Poichè le $M - N$ funzioni $f_{N+1}(x)$, $f_{N+2}(x), ..., f_M(x)$ sono tutte continue è possibile determinare un intorno $\Delta \equiv \Delta(\sigma, N, \xi)$ del punto ξ in guisa da avere

$$|f_\mu(x) - f_\mu(\xi)| < \sigma, \tag{8}$$

per ogni x di $E \cdot \Delta$ e ogni μ con $N < \mu \leqq M$.

Fissiamo l'attenzione su un punto qualunque x di $E \cdot \Delta$, e sia $\nu = \nu(x)$ il valore dell'indice ν relativo a questo punto per cui valgono le (7); poichè evidentemente

$$f_M(x) = f_\nu(x) + (f_M(x) - f_M(\xi)) + (f_M(\xi) - f_\nu(\xi)) + (f_\nu(\xi) - f_\nu(x)), \tag{9}$$

e $M \geqq \nu > N$, per le (6) e (8), otteniamo

$$f_M(x) < f_\nu(x) + 3\sigma,$$

e da questa per le (7) ricaviamo finalmente

$$f_M(x) < f_n(x) + 4\sigma < f(x) + 5\sigma,$$

per ogni $n \geqq M$ e ogni x di $E \cdot \Delta$.

Per l'arbitrarietà di σ questo risultato ci dice che è soddisfatta la *d)*, poichè N può essere scelto comunque grande.

Il Teorema III risulta dimostrato.

OSSERVAZIONE. — Si riconosce facilmente, modificando di poco questa dimostrazione, che: Le condizioni *c)* e *e)* prese insieme sono necessarie e sufficienti per assicurare la convergenza uniforme in E della serie $u_1(x) + u_2(x) + ...$ (convergente in E), quando si presupponga che i termini $u_n(x)$ $(n = 1, 2, 3,...)$ siano funzioni semicontinue inferiormente e che esista una successione (indefinita)

$$f_{n_1}(x), \quad f_{n_2}(x), \quad f_{n_3}(x), ...$$

di somme parziali continue.