Bollettino Unione Matematica Italiana

Renato Caccioppoli

Sul prolungamento analitico delle funzioni di due variabili complesse

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.4, p. 209–212.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_4_209_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1934.

Sul prolungamento analitico delle funzioni di due variabili complesse.

Nota di Renato Caccioppoli (a Padova).

Sunto. - *Si estendono alle funzioni analitiche di due variabili i teoremi più generali sulle singolarità « eliminabili »; e i risultati ottenuti sul prolungamento « per continuità » si completano ulteriormente introducendo la continuità rispetto ad un' unica variabile e considorando il prolungamento meromorfe accanto a quello analitico ordinario (olomorfo).*

1. Sono fondamentali, nella teoria del prolungamento analitico delle funzioni di una variabile, i teoremi di Riemann sulle cosiddette « singolarità eliminabili », assegnanti delle condizioni sufficienti perchè un punto o una linea possano includersi nel campo di esistenza di una funzione analitica. Ne è ben nota l'applicazione al prolungamento analitico *per continuità*, oltre una linea rettificabile.

Questi teoremi sono suscettibili di larghe generalizzazioni. I risultati ottenuti in proposito da Painlevé possono succintamente enunciarsi come segue: Una funzione analitica è prolungabile su un insieme di lunghezza nulla se *limitata* intorno ad esso, e su un insieme di lunghezza finita se *continua*; la *lunghezza* di un insieme essendo definita come quella di una linea secondo Minkowski.

I teoremi di Riemann sono stati estesi alle funzioni di più variabili [1]; non così, ch'io sappia, quelli di Painlevé. Scopo della presente Nota è di colmare questa lacuna, specialmente per quanto riguarda il *prolungamento, olomorfo o meromorfo, per continuità.*

Ci limiteremo al caso di due variabili; l'estensione ad n variabili sarebbe immediata.

2. Il risultato da cui prenderemo le mosse consiste sostanzialmente in ciò, che *un prolungamento, olomorfo o meromorfo, di una*

[1] V. Osgood, *Lehrbuch der Funktionenttheorie*, II_1, Kap. III, §§ 3-8.

funzione di due variabili rispetto ad una sola di queste fornisce un analogo prolungamento rispetto al complesso delle variabili.

Precisiamo il senso di quest'affermazione. Sia $f(x, y)$ una funzione delle due variabili complesse x, y, olomorfa (meromorfa) per $|x| < \rho$, $|y| < r$. Supponiamo che per *quasi tutti* i punti $\bar{x}$ del cerchio (ρ): $|x| < \rho$, la funzione $f(\bar{x}, y)$ sia olomorfa (meromorfa) in y per $|y| < R$ $(R > r)$: *allora* f(x, y) *risulterà olomorfa (meromorfa) in* x, y *complessivamente, per* $|\mathrm{x}| < \rho$, $|\mathrm{y}| < \mathrm{R}$ (¹).

Consideriamo ora nello spazio a quattro dimensioni (x, y) un insieme chiuso e limitato I. Indichiamo con $M(d)$ la misura dell'insieme dei punti aventi da I distanza non superiore a d: adottando il surricordato punto di vista di MINKOWSKI, diremo che I (riguardato come una varietà a tre dimensioni) ha *volume finito* se $M(d)$ è infinitesimo con d *almeno del primo ordine*; diremo poi che il volume di I è *nullo* se $M(d)$ è, rispetto a d, di *ordine superiore* (²).

È evidente che se I ha volume finito, quasi tutte le sue sezioni fatte con piani $x = \text{cost.}$, $y = \text{cost.}$ hanno, sul proprio piano, *lunghezza* finita: se poi I ha volume nullo, tali sezioni hanno quasi tutte lunghezza nulla.

Ciò posto, consideriamo nello spazio (x, y) un campo C, che per semplicità possiamo prendere della forma $|x| \leq \rho$, $|y| \leq r$, ed in C un insieme I. Sia x_0 un punto del cerchio (ρ), tale che non tutti i punti (x_0, y) di C appartengano ad I; allora se $f(x, y)$ è olomorfa su $C - I$, essa risulterà olomorfa in un punto (x_0, y_0), e potrà prolungarsi per $|y| < r$ ed x in un intorno di x_0, purchè, come funzione di sola y, sia olomorfa per $|y| < r$ e per quasi tutti i valori di x prossimi a x_0. Ora perchè ciò accada è sufficiente: 1°) che I abbia volume nullo e che f sia limitata, oppure: 2°) che I abbia volume finito e che f sia definibile su I come funzione continua di y. Nel primo caso si potrà poi anche concludere che f si mantiene olomorfa internamente a C, poichè scambiando gli uffici di x e di y si vede subito che su ogni piano $x = \text{cost.}$, $y = \text{cost.}$, secante C, cadono punti in cui f risulta olomorfa. Per giungere allo stesso risultato nel secondo caso occorrerà inoltre, com'è ovvio, supporre che i piani $x = \text{cost.}$ contengano sempre punti di $C - I$; oppure che f sia continua su I anche rispetto ad x.

(¹) V. CACCIOPPOLI, *Un teorema generale sulle funzioni di due variabili complesse*, « Rend. Lincei », 1° sem. 1934.

(²) Si dice anche che l'ordine dimensionale di I è ≤ 3 nel primo caso, < 3 nel secondo. Cfr. BOULIGAND, *Ensembles impropres et nombre dimensionnel*, « Bull. des Sc. Math. », 1928.

Chiediamoci ancora quale ipotesi su I potrebbero dispensare da ogni altra relativa ad f. Occorrerebbe che quasi tutti i piani $x=$ cost., $y=$ cost. non incontrassero I. Ciò avviene certamente se $M(d)$ è infinitesima *di ordine superiore al secondo*: si può dire che I presenta *area nulla*. Di questo risultato manca naturalmente l'analogo per le funzioni di una variabile (¹).

3. Possiamo ora enunciare il seguente teorema:

Sia f(x, y) *una funzione olomorfa nel campo (aperto)* C, *eccezion fatta al più per i punti di un insieme chiuso* (*su* C) I; *in ognuno dei tre casi seguenti:*

a) I *è di area nulla,*

b) I *è di volume nullo e* f *è limitata,*

c) I *ha volume finito* (²) *e* f *è continua;* f *è prolungabile analiticamente su* I.

Dalle considerazioni precedenti si deduce poi ancora una sostanziale generalizzazione delle ipotesi *c)*:

Se f(x, y), *olomorfa in* C — I, *è continua rispetto ad un'unica variabile anche nei punti dell'insieme di volume finito* I, *essa ammette ivi prolungamento analitico.*

La variabile in questione può naturalmente anche essere una funzione analitica z di x ed y; e beninteso si supporrà che ogni sezione di C con una caratteristica z contenga punti esterni ad I. Osserviamo ancora che basterà la continuità sia assicurata su *quasi tutte* queste caratteristiche.

4. L'estensione al prolungamento meromorfo del primo teorema conduce nel caso *a)* al risultato: *Le singolarità essenziali di una funzione in un campo non possono costituire un insieme di area nulla* (³); negli altri due casi si ottengono (⁴) corollari banali.

L'estensione del secondo teorema fornisce un risultato nuovo, sul prolungamento meromorfo per continuità parziale:

La funzione f(x, y), *suscettibile del valore* ∞, *sia meromorfa in*

(¹) Per il caso che I sia una curva regolare v. OSGOOD, loc. cit.

(²) Le proprietà dimensionali di I si definiscono qui, naturalmente, con riferimento a C, cioè si considerano fra i punti a distanza $\leq d$ solo quelli di C.

(³) Questo teorema e l'analogo precedente sono peraltro facili conseguenze dei «teoremi di continuità» per le singolarità delle funzioni di più variabili.

(⁴) Includendo l'infinito tra i valori di f, e sostituendo all'ipotesi che f sia finita l'altra che essa non sia completamente indeterminata.

C — I: *se* I *ha volume finito, ed* f *si mantiene continua rispetto ad un' unica variabile (la continuità definendosi sulla sfera complessa) essa ammette prolungamento meromorfo su* I.

Vanno ripetute per questo teorema le osservazioni precedenti.