Leonida Tonelli

Su una particolare questione di Calcolo delle Variazioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.4, p. 205–209.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_4_205_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1934.

PICCOLE NOTE

Su una particolare questione di Calcolo delle Variazioni.

Nota di LEONIDA TONELLI (a Pisa).

Sunto. - *Si mostra come un recente risultato del* MAMMANA *sul minimo dell'integrale* $\int y^m \sqrt{1+y'^2}dx$ *segua facilmente sia dalla teoria classica sugli estremi relativi, sia dal metodo diretto per gli estremi assoluti sviluppato nei* Fondamenti di Calcolo delle Variazioni *di* L. TONELLI.

Nel precedente fascicolo di questo « Bollettino » (pp. 174-177), il prof. G. MAMMANA ha annunciato di aver stabilito, con metodo diretto, un criterio di sufficienza per un estremo nei problemi di Calcolo delle Variazioni. Senza enunciare esplicitamente il criterio (che sarà dato in una Memoria di prossima pubblicazione nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo »), ne ha indicata un'applicazione, che qui voglio richiamare riportando testualmente quanto Egli stesso ha scritto.

« L'applicazione di tale criterio, alla questione classica della « ricerca dei minimi degli integrali aventi le curve di RIBAUCOUR « come estremali, porta al cospicuo risultato che qui riassumo. « Questa particolare questione vien così posta:

« Nell'insieme, I, formato dalle curve L, di classe $C^{(1)}$, la cui « equazione possa mettersi sotto la forma non parametrica: $y = y(x)$ « e soddisfacenti alle condizioni (agli estremi): $y(x_1) = y_1$; $y(x_2) = y_2$, « ($P_1(x_1, y_1)$ e $P_2'(x_2, y_2)$ essendo due punti assegnati del semipiano « $y > 0$), determinare quelle (eventuali) che fanno acquistare al- « l'integrale:

$$J_{[y]} = \int_{x_1}^{x_2} y^{1/n} \sqrt{1+y'^2}dx, \qquad n > 0,$$

« il minimo valore.

« PREMESSA. — Si consideri l'insieme F_1, $\{F_2\}$, di tutte le estre- « mali — relative a J — appartenenti a P_1, $\{P_2\}$. Queste curve

« sono inviluppate da un'unica curva regolare Λ_1, $\{\Lambda_2\}$, simme-
« trica rispetto alla normale N_1, $\{N_2\}$, all'asse delle x condotta
« da P_1, $\{P_2\}$, la quale si estende, a destra e a sinistra di N_1, $\{N_2\}$,
« a distanza infinita, volge la concavità verso le $y > 0$, e ha il ver-
« tice nel punto $(x_1, 0)$, $\{(x_2, 0)\}$.

. . . .

« Il dominio E_1, $\{E_2\}$, delle $y \geq 0$ limitato da Λ_1, $\{\Lambda_2\}$, è il
« luogo di tutte le estremali appartenenti a P_1, $\{P_2\}$.

« Il risultato di cui sopra si esprime, ciò posto, in questi ter-
« mini:

« *Se P_2 è contenuto in E_1 (e però P_1 contenuto in E_2) l'arco di*
« *estremale $y = g(x)$, congiungente P_1 e P_2 e interno — il punto*
« *terminale P_2 al più escluso — a E_1 (e conseguentemente a E_2,*
« *P_1 al più escluso) realizza sempre, senza eccezione, il minimo asso-*
« *luto di J nell'insieme, $\overset{*}{T}$, formato da tutte le curve, L, di I con-*
« *tenute in E_1 e da quelle contenute in E_2.*

. . . .

« Circa l'efficacia del criterio, di cui è cenno sopra, si ha una
« prova significativa nel risultato che, per esso, si raggiunge in
« questa particolare classica questione; risultato non incluso fra
« quelli che possono dedursi coi noti criteri di sufficienza per un
« estremo relativo, nè contenuto — nel caso particolare $n = 1$ —
« in quello notato dal TONELLI (cfr. l'opera di L. TONELLI, *Fonda-*
« *menti di Calcolo delle Variazioni*, vol. II, pag. 146 e seg.), a meno
« che, rispetto a quest'ultimo caso, non si impongano limitazioni
« nell'assegnare i punti terminali P_1 e P_2 ».

Sul risultato raggiunto dal MAMMANA nella particolare questione sopra indicata desidero fare qui un'osservazione.

Il risultato del MAMMANA non trovasi esplicitamente enunciato nei trattati di Calcolo delle Variazioni. In questi trattati, il problema di minimo dell'integrale $J_{[y]}$ è considerato nel suo *dominio naturale*, quello cioè costituito da *tutto* il semipiano $y \geq 0$; mentre, invece, il MAMMANA studia il problema nel dominio del tutto speciale E_1 (o E_2), il quale è soltanto una parte del semipiano $y \geq 0$ e lascia fuori completamente — ad esclusione del punto $(x_1, 0)$ — l'asse delle x, che è precisamente il luogo dei punti del semipiano $y \geq 0$ in cui l'integrale $J_{[y]}$ cessa di essere *regolare*. Tagliato fuori l'asse delle x, limitando inferiormente il dominio E_1 con la curva Λ_1, la questione risulta notevolmente semplificata, tanto che il risultato del MAMMANA vien dato immediatamente dalla teoria classica sugli estremi relativi; ed esso può anche ottenersi, senza alcuna difficoltà, col metodo diretto per gli estremi assoluti da me sviluppato nei miei *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*.

Per quanto riguarda la teoria classica sugli estremi relativi, basterà osservare che, se L $(y = y(x))$ è una curva di I contenuta in E_1, la differenza $J_{[y]} - J_{[g]}$ (dove $y = g(x)$ rappresenta, come è già stato detto, l'arco di estremale congiungente P_1 e P_2 e interno ad E_1, il punto P_2 al più escluso) si esprime mediante la nota formula di WEIERSTRASS

$$J_{[y]} - J_{[g]} = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{E}(x,\, y(x),\; \alpha(x,\, y(x)),\; y'(x))dx,$$

dove $\alpha(x, y)$ rappresenta il coefficiente angolare della tangente, nel punto (x, y), dell'arco di estremale che giunge a questo punto da P_1 senza incontrare Λ_1 prima di (x, y) medesimo. E siccome sulla curva L è sempre $\mathcal{E}(x, y, \alpha, y') \geq 0$, con $\mathcal{E}(x, y, \alpha, y') > 0$ se $\alpha \neq y'$, ne viene sempre

$$J_{[y]} - J_{[g]} \geq 0,$$

e, se P_2 non è su Λ_1 e non è $y(x) \equiv g(x)$ in (x_1, x_2),

$$J_{[y]} - J_{[g]} > 0.$$

Cosa analoga può dirsi per ogni curva L di I contenuta in E_2; e il risultato del MAMMANA è senz'altro stabilito.

Veniamo ora al metodo diretto esposto nei miei *Fondamenti*, col quale potremo ottenere un risultato anche più espressivo, trattando la questione in forma parametrica, vale a dire, studiando, in luogo di $J_{[y]}$, l'integrale

$$\mathfrak{J}_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} y^m ds, \qquad m > 0 \text{ (}^1\text{)}.$$

Consideriamo il problema del minimo di $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}$ nella classe K di tutte le curve continue e rettificabili $\mathcal{C}$ che congiungono i punti P_1 e P_2 e che giacciono in E_1 o in E_2. Indichiamo con K_1 la sottoclasse di K costituita da tutte le curve $\mathcal{C}$ di K che giacciono in E_1.

Analogamente a quanto è detto alla p. 417 del Vol. II dei *Fondamenti*, per il caso $m = 1$ e per le curve $\mathcal{C}$ che uniscono P_1 e P_2 e

(1) Qui cade opportuno osservare che, se nei miei *Fondamenti* il problema di minimo per $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}$, nella classe di tutte le curve continue e rettificabili che giacciono nel semipiano $y \geq 0$ ed hanno i punti terminali in due dati punti, è stato considerato solo per $m = 1$, ciò si deve al fatto che questo di $m = 1$ è il caso classico e più notevole e che la trattazione del caso generale di $m > 0$ si ottiene seguendo passo a passo quella del caso particolare $m = 1$.

giacciono in tutto il semipiano $y \geq 0$, si ha subito che in K_1 esiste il minimo assoluto di $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$ e che ogni arco di curva minimante, il quale non abbia punti sulla curva Λ_1, esclusi al più quelli terminali, è un arco di estremale per $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$. Pertanto, ogni curva minimante per $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$ in K_1, la quale non abbia su Λ_1 punti non terminali, è un arco di estremale e, precisamente, coincide con l'arco e di estremale che unisce P_1 e P_2 e che non ha su Λ_1 punti di ascissa maggiore di x_1 e minore di x_2.

Mostriamo che, *se P_2 non è su Λ_1*, non può esistere una curva $\mathfrak{C}_0$ minimante per $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$ in K_1 la quale abbia almeno un punto su Λ_1. Supponiamo, se è possibile, che la $\mathfrak{C}_0$ esista. Essa ha (*Fondamenti*, Vol. II, p. 128) tangente in tutti i suoi punti distinti da $(x_1, 0)$. Detto Q l'ultimo suo punto che è su Λ_1, l'arco $\overparen{QP_2}$ della $\mathfrak{C}_0$ è un arco di estremale tangente in Q alla Λ_1, e quindi è un arco dell'estremale che unisce P_1 e P_2 e tocca la Λ_1. Detto poi P il primo punto di $\mathfrak{C}_0$ che è su Λ_1, l'arco $\overparen{P_1P}$ della $\mathfrak{C}_0$ è anch'esso un arco di estremale. Se P coincide con $(x_1, 0)$, l'arco $\overparen{P_1P}$ è il segmento rettilineo $\overline{P_1P}$; in caso contrario $\overparen{P_1P}$ è un arco di estremale tangente in P alla Λ_1. In ogni caso la $\mathfrak{C}_0$ risulta composta degli archi $\overparen{P_1P}$ e $\overparen{QP_2}$ già detti e dell'arco $\overparen{PQ}$ di Λ_1; e, per il teorema degli inviluppi (*Fondamenti*, Vol. II, p. 149), anche tutto l'arco $\bar{e}$ di estremale che unisce P_1 e P_2 e tocca la Λ_1 è una curva minimante. Ma, come può vedersi in vari modi, è $\mathfrak{J}_e < \mathfrak{J}_{\bar{e}}$ (1) e perciò è provato che, se P_2 non è su Λ_1, non può esistere una curva minimante in K_1 che abbia punti su Λ_1, e quindi che l'arco di estremale e è l'unica curva minimante per $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$ in K_1.

Se poi *P_2 è su Λ_1*, il ragionamento ora fatto prova che l'arco di estremale e è ancora una curva minimante (ma non l'unica) per $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$ in K_1.

Considerazioni analoghe possono svolgersi per la sottoclasse K_2 di tutte le curve di K che giacciono in E_2, e il risultato del MAMMANA è nuovamente stabilito.

(1) Un modo per provare la $\mathfrak{J}_e < \mathfrak{J}_{\bar{e}}$, evitando qualsiasi calcolo e sfruttando soltanto le considerazioni già fatte, è il seguente. Sia M' un punto dell'arco $\overparen{QP_2}$ di $\bar{e}$, distinto da Q e da P_2, e si consideri il campo limitato da e, dall'arco $\overparen{M'P_2}$ di $\bar{e}$ e dall'arco di estremale e' che unisce P_1 e M' senza toccare Λ_1. Il minimo di $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$, fra tutte le curve di K che giacciono in questo campo, è dato, per considerazioni analoghe a quelle già svolte, dall'arco di estremale e, ed è unico, onde si ha $\mathfrak{J}_e < \mathfrak{J}_{e'} + \mathfrak{J}_{\overparen{M'P_2}}$. Se M'' è un punto dell'arco $\overparen{QM'}$ di $\bar{e}$, si ha, analogamente, $\mathfrak{J}_{e'} < \mathfrak{J}_{e''} + \mathfrak{J}_{\overparen{M''M'}}$ e perciò, facendo tendere M'' a Q, $\mathfrak{J}_{e'}$ risulta $\leq$ dell'integrale $\mathfrak{J}$ esteso all'arco $\overparen{P_1M'}$ di $\bar{e}$. Dunque $\mathfrak{J}_e < \mathfrak{J}_{\bar{e}}$.

Quanto precede mostra come sia immediatamente risolubile anche il problema della determinazione del minimo di $\mathfrak{I}_{\mathfrak{C}}$ (o quello di $J_{[y]}$ in analoghe condizioni) nella classe di tutte le curve continue e rettificabili che congiungono i punti P_1 e P_2 e giacciono nel dominio somma $E_1 + E_2$.