
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Sunti di lavori italiani

* Lavori di: Francesco Severi, Gabriele Mammana, G. Belardinelli

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 13 (1934), n.3, p. 171–178.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_3_171_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_3_171_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_3_171_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1934.

SUNTI DI LAVORI ITALIANI

FRANCESCO SEVERI: *Sulla differenziabilità totale delle funzioni di due o più variabili reali* (in corso di stampa negli « Annali di Matematica pura e applicata », serie IV, tomo XIII).

L'A. ha già definito altrove ⁽¹⁾ le tangenti e semitangenti e le corde improprie di un insieme qualunque in un suo punto d'accumulazione. Nella Memoria: *Sulla differenziabilità totale delle funzioni di più variabili reali* egli richiama rapidamente queste nozioni per mostrare poi qual partito se ne possa trarre nello studio delle funzioni reali di una n -pla di variabili reali, permettendo, esse nozioni, di tener conto in modo adeguato della natura dell'ente variabile indipendente.

È questo lo scopo principale della Memoria. Essa si chiude, è vero, con alcuni cenni circa una geometria intermedia fra la topologia e la topologia differenziale (e caratterizzata da quegli omeomorfismi che mutano tangenti e corde improprie in tangenti e corde improprie ⁽²⁾); ma son cenni rapidi e il suo nucleo è costituito da un gruppo di notevoli risultati circa le condizioni necessarie e sufficienti per la *differenziabilità* o l'*iperdifferenziabilità* ⁽³⁾

⁽¹⁾ *Su alcune questioni di topologia infinitesimale* (« Annales de la Société polonaise de Math. », t. IX, 1930).

⁽²⁾ Il senso di questa frase è precisato rigorosamente nel n. 28 della Memoria in discorso.

⁽³⁾ La differenziabilità di una funzione $f(P)$ in un punto P_0 , d'accumulazione per l'insieme I in cui $f(P)$ è definita, è intesa nel senso di STOLZ; si suppone cioè che esista un'espressione $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$, con α e β costanti, tale che

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{1}{P_0P} [f(P) - f(P_0) - \alpha \cdot \Delta x - \beta \cdot \Delta y] = 0,$$

P tendendo comunque a P_0 , in I , Δx e Δy essendo le componenti del vettore P_0P ; la iperdifferenziabilità va intesa nel senso che sia

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{1}{QP} [f(P) - f(Q) - \alpha \cdot \Delta x - \beta \cdot \Delta y] = 0,$$

per P e Q distinti e tendenti comunque a P_0 in I , Δx e Δy essendo le componenti del vettore QP , α e β essendo naturalmente costanti.

di una funzione in *un* punto o in *tutti* i punti di un dominio (le condizioni sinora note valendo invece ad assicurarne la differenziabilità in *quasi tutti* i punti di un insieme misurabile); da teoremi sui massimi, sui minimi e sulla continuità (superficiale, per le funzioni di due variabili reali) come conseguenza della convergenza a zero di quelli che son detti gli incrementi parziali generalizzati, ecc..

Per dare forma rapida e perspicua ai criteri in discorso, vengono introdotte le *derivate*, le *ultraderivate* e le *iperderivate direzionali* della funzione $f(P)$ in un punto di accumulazione dell'insieme in cui essa è definita; accanto a queste si considerano poi le *derivate parziali generalizzate*.

Che queste derivate permettano di tener conto della natura della $f(P)$, come funzione della n -pla delle coordinate di P e non delle coordinate prese separatamente, è anche provato *a posteriori* dal fatto che facendole entrare in giuoco si ottengono criteri di differenziabilità del tutto analoghi a quello noto per le funzioni reali di una variabile reale, per le quali è elementare che differenziabilità e derivabilità in un punto sono tutt'uno.

In quanto segue cercheremo di dare un'idea dei risultati raggiunti, limitandoci per semplicità a considerare funzioni reali di due variabili reali, come del resto vien fatto nella Memoria stessa.

Consideriamo una funzione $f(P)$, finita nell'insieme serrato I e continua nel punto P_0 , d'accumulazione per I . Denotino P e Q due punti distinti, variabili in I . E consideriamo i rapporti incrementali

$$(1) \quad \frac{f(P) - f(P_0)}{P_0P},$$

$$(2) \quad \frac{f(P) - f(Q)}{QP},$$

i cui denominatori si assumono sempre positivi.

Se il rapporto (1) tende ad un limite, quando P tende a P_0 con la condizione che la semiretta P_0P tenda verso una semiretta λ di origine P_0 , questo limite sarà la *derivata direzionale di f secondo la semitangente λ in P_0 all'insieme I* .

Se per $P \rightarrow P_0$ e $Q \rightarrow Q_0$, con la condizione che la retta QP tenda verso una posizione limite λ , esiste finito il limite del rapporto (2), questo limite si dirà la *iperderivata direzionale di f secondo la semicorda impropria λ in P_0 all'insieme I* .

Se il limite del rapporto (2) esiste ed è finito quando alle condizioni precedenti si aggiunga quella che le due semirette P_0P e P_0Q tendano verso due limiti qualsiasi, ma distinti, allora il li-

mite del rapporto (2) sarà la *ultraderivata direzionale* di $f(P)$ secondo la *semicorda impropria* λ in P_0 all'insieme I .

Le derivate parziali generalizzate di $f(P)$ rispetto a x e y — avendo posto $P \equiv (x, y)$ — in punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$, interno all'insieme in cui $f(P)$ è definita, sono definite come i limiti, supposti esistenti e finiti, cui tendono i *rapporti incrementali parziali (generalizzati)*

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0}, \quad \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0},$$

quando il punto P tende a P_0 in modo che la semiretta P_0P tenda verso una semiretta λ qualsiasi, prefissata, in cui non sia rispettivamente costante x od y . Si suppone naturalmente che questi rapporti non dipendano da λ e dal modo come P tende a P_0 .

I valori delle derivate parziali generalizzate, quando esistono entrambi, coincidono con i valori delle ultraderivate di f in P_0 secondo le parallele agli assi condotte per P_0 .

Ciò posto, le *ultra* e *iperderivate* e le derivate parziali generalizzate di $f(P)$ in P_0 sono legate alla differenziabilità e iperdifferenziabilità di $f(P)$ in P_0 dai seguenti teoremi:

Sia $f(P)$ una funzione finita di un punto P variabile in un insieme piano serrato I , avente in P_0 un'accumulazione regolare ⁽¹⁾. La $f(P)$ sia continua in P_0 . Allora condizione necessaria e sufficiente perchè $f(P)$ sia differenziabile in P_0 è che esistano ivi le ultraderivate secondo le semitangenti dell'insieme I in P_0 . In tal caso il differenziale di $f(P)$ in P_0 è individuato ⁽²⁾.

Se, nelle ipotesi del teorema precedente, $f(P)$ è iperdifferenziabile in P_0 , allora e solo allora $f(P)$ è iperderivabile secondo ogni semicorda impropria di I in P_0 . In tal caso l'iperdifferenziale è individuato.

Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $f(P)$ del punto $P \equiv (x, y)$ di un dominio piano I , sia differenziabile nel

⁽¹⁾ Val quanto dire: scelta comunque una semitangente μ e una semicorda impropria λ di I in P_0 , può determinarsi (almeno) una semitangente ν non allineata con μ , tale che λ sia ottenibile come limite della semiretta PQ per P, Q tendenti a P_0 sotto le condizioni $\lim P_0P = \mu$, $\lim P_0Q = \nu$. Per es., ogni punto interno a un dominio piano è di accumulazione regolare: ed è di accumulazione regolare anche un punto contorno non singolare di un dominio piano limitato da una curva di JORDAN.

⁽²⁾ Cioè, sono univocamente individuate le due costanti α e β , di cui si è già fatto cenno. L'A. esamina altresì il caso in cui esiste un fascio di differenziali o di iperdifferenziali.

punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ interno a I , è che in P_0 esistano le derivate parziali generalizzate rispetto a x e y .

Particolarmente suggestivi sono poi i seguenti criteri di iperdifferenziabilità e di differenziabilità per una funzione $f(x, y)$ in tutti i punti interni a un dominio piano I , in cui essa sia data:

Condizione necessaria e sufficiente perchè $f(x, y)$ sia iperdifferenziabile in ogni punto interno al dominio I , è che esistano dovunque nell'interno di I le derivate parziali di I e siano continue ⁽¹⁾ (la sufficienza della condizione essendo ovvia).

Se in ogni punto (x, y) interno a I esistono, univocamente determinati dal punto, i limiti

$$\alpha(x, y) = \lim_{\bar{x} \rightarrow x} \frac{f(\bar{x}, \bar{y}) - f(x, \bar{y})}{\bar{x} - x},$$

$$\beta(x, y) = \lim_{\bar{y} \rightarrow y} \frac{f(\bar{x}, \bar{y}) - f(\bar{x}, y)}{\bar{y} - y},$$

quando il punto $(\bar{x}, \bar{y})$ tende ad (x, y) sopra una retta qualunque uscente da (x, y) , sulla quale non sia rispettivamente costante x od y ; e le funzioni $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ son limitate nell'interno di I , la data funzione $f(x, y)$ è differenziabile nell'interno del dominio.

La Memoria si chiude, oltre che coi cenni ad una topologia del 1° ordine (cui abbiamo già alluso), con alcune osservazioni che rimettono in valore, nel solo senso in cui essa può rigorosamente sussistere, l'idea di LAGRANGE per la ricerca dei massimi e minimi di una funzione di due variabili; con una estensione del teorema di ROLLE e con alcune notizie circa una trattazione dei massimi e minimi per le funzioni di più variabili, di cui l'A. dichiara di aver già iniziato lo sviluppo.

GABRIELE MAMMANA: *Sopra un criterio di sufficienza per un estremo nei problemi di Calcolo delle Variazioni* (di prossima pubblicazione nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo »).

In una Memoria di prossima pubblicazione stabilisco, con metodo diretto ⁽²⁾, un criterio di sufficienza, per un estremo, nei pro-

⁽¹⁾ Questo equivale alla seguente notevole proprietà geometrica:

Una superficie di Jordan coi punti tutti semplici ha il piano tangente variabile con continuità, una proprietà analoga sussistendo per la tangente a una curva di Jordan a punti tutti semplici.

Vedi F. SEVERI, *Sulla differenziabilità....*; nn. 18 e 20.

⁽²⁾ Presupponendo nota soltanto la nozione di estremale.

blemi del Calcolo delle Variazioni che si riferiscono agli integrali del tipo:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx.$$

L'applicazione di tale criterio, alla questione classica della ricerca dei minimi degli integrali aventi le curve di RIBAUCOUR come estremali, porta al cospicuo risultato che qui riassumo.

Questa particolare questione così vien posta:

Nell'insieme, I , formato dalle curve, L , di classe $C^{(1)}$, la cui equazione possa mettersi sotto la forma non parametrica: $y=y(x)$ e soddisfacenti alle condizioni (agli estremi): $y(x_1)=y_1$; $y(x_2)=y_2$, ($P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ essendo due punti assegnati del semipiano $y > 0$) ⁽¹⁾, determinare quelle (eventuali) che fanno acquistare all'integrale:

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} y^n \sqrt{1+y'^2} dx, \quad n > 0 \quad (2)$$

il minimo valore.

PREMESSA. — Si consideri l'insieme $F_1, \{F_2\}$ di tutte le estremali — relative a J — appartenenti a $P_1, \{P_2\}$. Queste curve sono inviluppate da un'unica curva regolare $\Lambda_1, \{\Lambda_2\}$ simmetrica rispetto alla normale, $N_1, \{N_2\}$ all'asse delle x condotta da $P_1, \{P_2\}$ la quale si estende, a destra e a sinistra di N_1 , a distanza infinita, volge la concavità verso le $y > 0$, e ha il vertice nel punto $(x_1, 0), \{(x_2, 0)\}$.

La forma di Λ_1 è somigliante a quella di una parabola, e a una effettiva parabola (di equazione: $y = \frac{(x-x_1)}{4y}$) si riduce nell'ipotesi $n=2$.

Il dominio $E_1, \{E_2\}$ delle $y \geq 0$ limitato da $\Lambda_1, \{\Lambda_2\}$ è il luogo di tutte le estremali appartenenti a $P_1, \{P_2\}$.

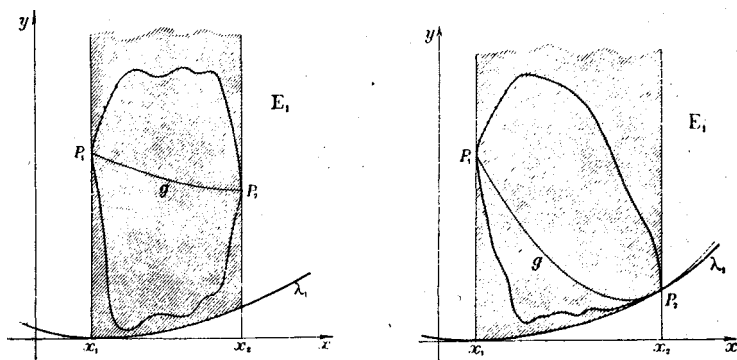
Il risultato di cui sopra si esprime, ciò posto, in questi termini:

Se P_2 è contenuto in E_1 (e però P_1 contenuto in E_2) l'arco di

(1) Nell'ipotesi: $y_1=y_2=0$, il minimo di J è realizzato dal segmento: $y=0, x_1 \leq x \leq x_2$, e nell'altra in cui sia: $y_1=0, y_2 > 0$, oppure: $y_1 > 0, y_2=0$, si verifica subito, non esiste minimo per J .

(2) Il caso $n < 0$ non viene preso in considerazione, poiché per esso esistono già trattazioni dirette esaurienti; il menzionato criterio, però, applicato a questo caso, relativamente semplice, conduce subito al risultato generale noto.

estremale $y = g(x)$, congiungente P_1 e P_2 e interno — il punto terminale P_2 al più escluso — a E_1' (e conseguentemente a E_2 , P_1 al più escluso) realizza sempre, senza eccezione, il minimo assoluto



di J nell'insieme, $\tilde{T}$, formato da tutte le curve, L , di I contenute in E_1 e da quelle contenute in E_2 .

La frase senza eccezione va intesa nel senso che il risultato si applica tanto al caso — ordinario dirò — in cui P_2 sia interno a E_1 ⁽¹⁾, (e quindi P_1 interno a E_1) quanto al caso — dirò limite — in cui P_1 e P_2 abbiano posizioni mutue estreme, appartenendo P_2 alla frontiera Λ_1 di E_1 , e P_1 , quindi, alla frontiera Λ_2 di E_2 ⁽²⁾.

Questo secondo caso è considerato, nelle trattazioni ordinarie, eccezionale; al riguardo si dice che non esiste minimo, in I , per $J_{[y]}$, in base al fatto che, relativamente all'unica estremale congiungente P_1 e P_2 , non è soddisfatta la condizione necessaria di WEIERSTRASS per un estremo relativo.

E ciò sembrerebbe in contrasto col risultato ora raggiunto. In effetto non c'è contraddizione: il fatto che, rispetto a g , non è soddisfatta la condizione di WEIERSTRASS, porta a questa conseguenza; « non esiste un intorno funzionale I_ρ di g (composto, cioè, da tutte le curve di I contenute nel dominio per cui: $x_1 \leq x \leq x_2$, $g(x) - \rho \leq y \leq g(x) + \rho$) per quanto piccolo si prenda ρ , nel quale g

⁽¹⁾ Questo caso viene indicato, negli ordinari trattati, come quello per cui si realizzano *in senso stretto* le condizioni di JACOBI.

⁽²⁾ Noto come quello per cui: le condizioni di JACOBI sono realizzate *in senso largo*, e cioè, P_1 e P_2 sono coniugati — nel senso di JACOBI — sull'estremale unica appartenente ad essi.

sia *estremante*. Secondo il superiore risultato, invece, g dà il minimo di J in $\bar{T}^*$. Ora un intorno del tipo I_ρ non è contenuto in $\bar{T}^*$, chè, per le curve di quest'ultima classe, l'inclinazione può essere *bensì qualunque in ogni punto salvo però in uno solo dei terminali*, in P_2 , ad esempio, dove è limitata superiormente dalla inclinazione, in P_2 stesso, di A_1 .

Ma il considerare questo caso — limite — eccezionale non mi sembra opportuno, presentandosi esso, come l'altro ordinario, rispetto al quale cioè: è soddisfatta la condizione di WEIERSTRASS, ed esiste — come è noto — un intorno I_ρ con la proprietà di minimo sopraddetta.

Circa l'efficacia del criterio, di cui è cenno sopra, si ha una prova significativa nel risultato che, per esso, si raggiunge in questa particolare classica questione; risultato non incluso fra quelli che possono dedursi coi noti criteri di sufficienza per un estremo relativo, nè contenuto — nel caso particolare $n=1$ — in quello notato dal TONELLI ⁽¹⁾, a meno che, rispetto a quest'ultimo caso, non si impongano limitazioni nell'assegnare i punti terminali P_1 e P_2 .

G. BELARDINELLI: *Sulla rappresentazione delle funzioni algebriche mediante funzioni ipergeometriche*. « Rendiconti Istituto Lombardo », 1934.

In una comunicazione fatta al Congresso di Zurigo, l'A. ha dato la costruzione dei coefficienti di una serie di potenze che rappresenta una funzione algebrica mediante le funzioni ipergeometriche di POCHHAMMER. In questo lavoro l'A. continuando le sue ricerche, introduce prima la nozione di serie ipergeometriche di polinomi, pone poi in relazione queste serie con una funzione algebrica generale della quale dà infine una rappresentazione mediante integrali definiti.

Fà applicazioni a particolari funzioni algebriche.

G. BELARDINELLI: *Su una teoria astratta del Calcolo delle probabilità*. « Giornale dell'Istituto italiano degli Attuari », (in corso di pubblicazione).

Il prof. CANTELLI ha esposto una teoria estratta del Calcolo delle probabilità ed ha dimostrato che i concetti da Lui introdotti

⁽¹⁾ Cfr. l'opera di L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, vol. II, pag. 416 e seg., Bologna, Zanichelli.

di *insiemi moltiplicabili* e di *variabile ponderata* permettono di ottenere per via astratta successioni normali.

L'A., riferendosi ai suddetti concetti, studia la formazione di insiemi della stessa misura che con il concetto di variabile ponderata di CANTELLI permettono di ottenere per via astratta la successione non normale delle probabilità che si hanno nel problema delle successive estrazioni da un'urna senza riporvi la palla estratta.
