Mario Manarini

A proposito di una recente Nota del sig. L. Castoldi: “Sopra una deduzione geometrica della formula fondamentale della Cinematica dei sistemi rigidi„

Bollettino dell’Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.3, p. 168–170.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_3_168_0>

A proposito di una recente Nota del sig. L. Castoldi: "Sopra una deduzione geometrica della formula fondamentale della Cinematica dei sistemi rigidi" [1].

Nota di M. MANARINI (a Bologna).

Sunto. - *L'A. discute la pubblicazione di cui sopra del sig.* L. CASTOLDI *e con l'occasione accenna ad un suo metodo per dedurre la formula fondamentale della Cinematica dei sistemi rigidi che presenta, oltre al vantaggio di una certa semplicità, il carettere di poterlo senz'altro usare negli spazi* S_n.

Il sig. L. CASTOLDI nella Nota richiamata, afferma di ottenere la formula fondamentale della Cinematica dei sistemi rigidi in modo più rapido di quello che altri Autori riportano nei loro trattati. Ora un semplice confronto non pare favorevole a questa affermazione, poichè la via geometrico-vettoriale seguita dal CASTOLDI, se presenta una certa originalità, è assai laboriosa, sia dal punto di vista analitico, che da quello concettuale.

La semplicità e la spontaneità delle dimostrazioni geometriche che si trovano nei varî trattati italiani è stata esaurientemente difesa dal prof. BURGATTI, nel 1925 [2], a proposito di una Nota del prof. BISCONCINI relativa sostanzialmente allo stesso argomento.

[1] « Rend. del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », serie II, vol. LXVII, fasc. VI-X, 1934.

[2] Cfr. « Boll. Unione Matematica Italiana », vol. IV, pag. 56.

Perciò mi pare che non sia il caso di ripetere cose già dette autorevolmente.

Invece, con l'occasione, richiamo l'attenzione sul fatto che, qualora anche in un Corso didattico, siano state premesse le *poche* ed *utilissime* nozioni fondamentali sulle omografie vettoriali (come per es. si trovano nel vol. I della *Meccanica razionale* del prof. R. MARCOLONGO, ed. Hoepli, Milano), per stabilire le formule della Cinematica dei sistemi rigidi si potrebbe seguire, con qualche vantaggio, una via semplice da me già accennata e sviluppata per lo spazio ad un numero qualunque n di dimensioni, in una mia recente Memoria [1].

Mi permetto di riportarla qui in modo esteso e ciononondimeno assai rapido, con la pura limitazione allo spazio ordinario che interessa nei Corsi elementari.

Cominciamo dal caso del corpo rigido con un punto fisso O.

Osserviamo che la corrispondenza fra i vettori $(M - O)$ nel corpo e le velocità $\frac{dM}{dt}$ dei punti M del corpo, è *lineare*, giacchè se è

$$(M_3 - O) = (M_1 - O) + (M_2 - O), \quad (M_2 - O) = m(M_1 - O),$$

si ha rispettivamente:

$$\frac{dM_3}{dt} = \frac{dM_1}{dt} + \frac{dM_2}{dt}, \quad \frac{dM_2}{dt} = m\frac{dM_1}{dt},$$

essendo M_1, M_2, M_3 punti non allineati del corpo ed m un numero reale. Perciò si tratta di una *omografia vettoriale*, naturalmente variabile col tempo.

Indicandola con α, si può scrivere, per ogni punto M del corpo ed in un generico tempo t:

$$\mathrm{v}_M = \frac{dM}{dt} = \alpha(M - O). \tag{1}$$

Se N è un altro punto del corpo si ha subito

$$\frac{dN}{dt} - \frac{dM}{dt} = \alpha(N - O) - \alpha(M - O) = \alpha(N - M). \tag{2}$$

D'altra parte, per la rigidità, si ha la nota circostanza

$$\left(\frac{dN}{dt} - \frac{dM}{dt}\right) \times (N - M) = 0, \tag{3}$$

conseguenza immediata di $(N - M)^2 = \text{cost}$.

[1] Cfr. *Sul calcolo plurivettoriale negli spazi* S_n *e applicazioni alla meccanica dei sistemi rigidi*. « Annali di Matematica pura ed applicata », T. XII, 1933-34, pag. 106; cfr. anche la prefazione.

Per le (2) e (3) si ha

$$\alpha(N-M)\times(N-M)=0, \tag{4}$$

la qual cosa assicura che α è un'*omografia assiale*, essendo N ed M arbitrari nel corpo.

Se ω è il vettore di α, si può scrivere $\alpha=\omega\wedge$ e quindi la (1) diviene:

$$\frac{dM}{dt}=\omega\wedge(M-O) \tag{5}$$

e il vettore-applicato (O, ω) definisce lo stato cinetico di rotazione.

Il prof. BOGGIO, che introduce α in un'altra maniera, adopera per essa il nome *omografia di rotazione*.

Se ora veniamo al corpo libero da vincoli, possiamo pensare in esso solidale una terna qualsiasi $(O_1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$ nel mentre per un punto fisso O, un'altra terna $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ si muove mantenendosi costantemente parallela alla precedente; cosicchè in ogni istante abbiamo $\mathbf{i}_1=\mathbf{i}$, $\mathbf{j}_1=\mathbf{j}$, $\mathbf{k}_1=\mathbf{k}$.

Allora se (O, ω) è lo stato cinetico di rotazione di $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ si hanno dalla (5) le formule di POISSON:

$$\frac{d\mathbf{i}_1}{dt}=\omega\wedge\mathbf{i}_1,\quad \frac{d\mathbf{j}_1}{dt}=\omega\wedge\mathbf{j}_1,\quad \frac{d\mathbf{k}_1}{dt}=\omega\wedge\mathbf{k}_1. \tag{6}$$

Se ora $(M-O)$ è un vettore del corpo mobile, decomponendolo secondo $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$ e derivando rispetto al tempo, si ottiene subito:

$$\frac{dM}{dt}=\frac{dO}{dt}+\omega\wedge(M-O), \tag{7}$$

ed anche con questo metodo, il vettore ω che vi figura risulta implicitamente indipendente dai punti O ed M scelti nel corpo mobile, cosa che è stata pure di particolare preoccupazione per l'Autore in parola.