BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

RENATO EINAUDI

Onde elastiche epicentrali del tipo di Rayleigh

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **13** (1934), n.3, p. 160–168.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_3_160_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_3_160_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Onde elastiche epicentrali del tipo di Rayleigh.

Nota di RENATO EINAUDI (a Torino).

È noto che le « soluzioni di RAYLEIGH » delle equazioni dell'elasticità descrivono la propagazione, in un suolo elastico limitato da un piano π , di un'onda di condensazione e di un'onda di distorsione, piane sinusoidali smorzate in profondità.

Le « soluzioni di RAYLEIGH » sembrano quindi rappresentare assai bene il fenomeno della propagazione delle onde sismiche della « fase di RAYLEIGH » solo a grande distanza dall'epicentro, quando cioè il fronte dell'onda si possa considerare come piano.

In questo lavoro mi sono proposto di determinare delle soluzioni delle equazioni dell'elasticità, che rappresentino il fenomeno della propagazione delle onde della « fase di RAYLEIGH », non solo a grande distanza dall'epicentro, ma anche nei punti vicini all'epicentro stesso, e che coincidano a grande distanza dall'epicentro colle soluzioni di RAYLEIGH.

A tal uopo ho studiato nel § 1 tutte le possibili onde smorzate che si possono propagare in un suolo elastico piano e che sono

dovute alla sovrapposizione della più generale onda di condensazione e della più generale onda di distorsione.

Nel § 2 ho applicate il risultato generale al caso che la perturbazione elastica soddisfi alla condizione di simmetria circolare in ogni piano parallelo al piano π e ho ottenuto così le espressioni esplicite dello spostamento elastico che permettono di seguire una perturbazione epicentrale dall'epicentro sino a distanza infinita.

§ 1. — Fissiamo dunque nello spazio un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, in cui il piano (x, y) coincida col piano π e l'asse delle z sia rivolto verso l'interno del suolo elastico. Indichiamo con λ e μ i parametri elastici di LAME, con ρ la densità, con u, v, w le componenti secondo gli assi xyz dello spostamento elastico.

Ciò posto, proponiamoci di determinare le più generali soluzioni delle equazioni dell'elasticità che corrispondono alla sovrapposizione di un'onda di condensazione smorzata in profondità con un coefficiente di smorzamento α e di un'onda di distorsione smorzata in profondità con un coefficiente β ; dovremo quindi cercare delle soluzioni delle equazioni dell'elasticità del tipo:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} e^{-\alpha z} + A e^{-\beta z} \\ v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} e^{-\alpha z} + B e^{-\beta z} \\ w = -\alpha \Phi e^{-\alpha z} + \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) e^{-\beta z} \end{array} \right.$$

ove A, B, Φ sono funzioni di x, y, z .

Cominciamo ad imporre che siano soddisfatte, per $z=0$, le condizioni di sforzo nullo:

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad (2') \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0;$$

$$(2'') \quad (\lambda + 2\mu) + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Le condizioni (2) e (2') equivalgono evidentemente alle condizioni:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} -2\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \beta A + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) = 0; \\ -2\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \beta B + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) = 0; \end{array} \right.$$

da cui si vede che A e B debbono essere le derivate rispetto a x e y di un'unica funzione ψ :

$$(4) \quad A = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Colle posizioni (4) le (1) diventano:

$$(5) \quad \begin{cases} u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} e^{-\alpha z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} e^{-\beta z} \\ v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} e^{-\alpha z} + \frac{\partial \psi}{\partial y} e^{-\beta z} \\ w = -\alpha \Phi e^{-\alpha z} + \frac{1}{\beta} \Delta_2 \psi e^{-\beta z} \end{cases}$$

ove Δ_2 è l'operatore Laplaciano del piano:

$$(5') \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Colle posizioni (4), le (3) diventano:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ -2\alpha \Phi - \beta \psi + \frac{1}{\beta} \Delta_2 \psi \right\} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left\{ -2\alpha \Phi - \beta \psi + \frac{1}{\beta} \Delta_2 \psi \right\} = 0,$$

cui si soddisfa, ponendo fra Φ e ψ il legame:

$$(6) \quad -2\alpha \Phi - \beta \psi + \frac{1}{\beta} \Delta_2 \psi = 0.$$

Dalla (5) si ricava infine che la condizione (2'') equivale alla relazione:

$$(7) \quad \lambda \Delta_2 \Phi - 2\mu \Delta_2 \psi + \alpha^2 (\lambda + 2\mu) \Phi = 0.$$

Ciò posto, prendiamo in esame le equazioni dell'elasticità. Dalla (5) si ricava che esse equivalgono alle relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (\lambda + 2\mu)(\Delta_2 \Phi + \alpha^2 \Phi) - \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right\} e^{-\alpha z} + \left\{ \mu(\Delta_2 \psi + \beta^2 \psi) - \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right\} e^{-\beta z} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (\lambda + 2\mu)(\Delta_2 \Phi + \alpha^2 \Phi) - \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right\} e^{-\alpha z} + \left\{ \mu(\Delta_2 \psi + \beta^2 \psi) - \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right\} e^{-\beta z} &= 0 \\ \left\{ (\lambda + 2\mu)(\Delta_2 \Phi + \alpha^2 \Phi) - \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right\} e^{-\alpha z} + \Delta_2 \left\{ \mu(\Delta_2 \psi + \beta^2 \psi) - \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right\} e^{-\beta z} &= 0 \end{aligned}$$

cui si soddisfa imponendo alle funzioni Φ e ψ di essere soluzioni delle equazioni:

$$(8) \quad (\lambda + 2\mu)(\Delta_2 \Phi + \alpha^2 \Phi) - \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0,$$

$$(9) \quad \mu(\Delta_2 \psi + \beta^2 \psi) - \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

Complessivamente dunque le funzioni Φ e ψ debbono soddisfare le relazioni (6), (7), (8) e (9), affinchè risultino soddisfatte le equazioni dell'elasticità e le condizioni di sforzo nullo nel piano $z = 0$.

Per studiare la compatibilità delle equazioni (6), (7), (8) e (9), immaginiamo di ricavare dalla (6) la Φ in funzione della ψ , di sostituirla nelle relazioni (7) e (8) e di eliminare la $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ mediante la (9). Si otterranno così per la ψ due equazioni del tipo:

$$\Delta_4 \psi + \gamma_1 \Delta_2 \psi + \gamma_2 \psi = 0, \quad \Delta_4 \psi + \delta_1 \Delta_2 \psi + \delta_2 \psi = 0,$$

ove $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ sono costanti. Da queste relazioni si vede, sottraendo, che $\Delta_2 \psi$ deve essere proporzionale a ψ , e quindi, in virtù della (6), che Φ deve essere proporzionale a ψ . Ne segue che l'equazione (8) dovrà essere verificata anche dalla funzione ψ :

$$(\lambda + 2\mu)(\Delta_2 \psi + \alpha^2 \psi) - \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

che, sottratta dalla (9), dà:

$$(8') \quad \Delta_2 \psi + \frac{1}{\lambda + \mu} [(\lambda + 2\mu)x^2 - \mu\beta^2] \psi = 0.$$

Dalla (6) e dalla (8') si ricava che:

$$(6') \quad \Phi = -\frac{1}{2(\lambda + \mu)} \left[\lambda \frac{\beta}{\alpha} + (\lambda + 2\mu) \frac{\alpha}{\beta} \right] \psi.$$

Teniamo conto ora della condizione (7). Se in essa eliminiamo Φ , $\Delta_2 \Phi$ e $\Delta_2 \psi$ mediante le relazioni (6') e (8'), si vede che la (7) è soddisfatta se, posto:

(10)

$$k = \alpha/\beta$$

k è una soluzione dell'equazione:

$$(7) \quad (\lambda + 2\mu)^2 k^4 - 4(\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)k^3 + 2\lambda(k + 2\mu)k^2 + 4\mu(\lambda + \mu)k + \lambda^2 = 0.$$

Finalmente eliminiamo $\Delta_2 \psi$ fra le equazioni (8') e (9), con che si ottiene l'equazione:

$$(9') \quad -\frac{(\lambda + 2\mu)\mu}{\rho(\lambda + \mu)} (x^2 - \beta^2) \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

L'equazione (7') ammette evidentemente due radici positive: l'una, $k = 1$, è da scartarsi, in quanto la (9') si ridurrebbe, per

$k = 1$, a $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$, la cui soluzione è, nel problema che stiamo trattando, priva di significato fisico; l'altra radice, che è quella che va presa in considerazione, sarà quindi la radice positiva dell'equazione:

$$(10') \quad (\lambda + 2\mu)^2 k^2 - (\lambda + 2\mu)(3\lambda + 2\mu)k^2 - (\lambda + 2\mu)^2 k - \lambda^2 = 0$$

che, se $\lambda = \mu$, è uguale a 2,15.

Ciò posto, poniamo:

$$(11) \quad \delta^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)\mu\beta^2}{\rho(\lambda + \mu)} (k^2 - 1)$$

$$(12) \quad \gamma^2 = \frac{\beta^2}{\lambda + \mu} [(\lambda + 2\mu)k^2 - \mu]$$

$$(13) \quad \varepsilon = -\frac{1}{2(\lambda + \mu)} \left[\frac{\lambda}{k} + (\lambda + 2\mu)k \right]$$

Dalle relazioni (5), (6'), (8') e (9') si vede allora che le più generali soluzioni delle equazioni dell'elasticità che corrispondono alla propagazione di due onde smorzate in profondità, l'una di condensazione e l'altra di distorsione, sono date dalle relazioni:

$$(14) \quad \begin{aligned} u &= (e^{\varepsilon} e^{-k\beta z} + e^{-\beta z}) \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \sin \delta t + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \cos \delta t \right) \\ v &= (e^{\varepsilon} e^{-k\beta z} + e^{-\beta z}) \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \sin \delta t + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \cos \delta t \right) \\ w &= - \left(k\beta \varepsilon e^{-k\beta z} + \frac{\gamma^2}{\beta} e^{-\beta z} \right) (\psi_1 \sin \delta t + \psi_2 \cos \delta t) \end{aligned}$$

ove k è la radice positiva dell'equazione (10'), β è una costante arbitraria, ψ_1 e ψ_2 due soluzioni arbitrarie dell'equazione:

$$(15) \quad \Delta_2 \psi + \gamma^2 \psi = 0$$

Alcune interessanti proprietà si deducono immediatamente dalle (14). Innanzi tutto è bene osservare che anche nel caso più

generale di un'onda di condensazione e di un'onda di distorsione smorzate e sovrapposte, il rapporto fra il coefficiente di smorzamento dell'onda di condensazione e il coefficiente di smorzamento dell'onda di distorsione è univocamente determinato e coincide col valore trovato da RAYLEIGH nel caso delle onde piane sinusoidali.

In secondo luogo si deduce da (14) che, anche nel caso più generale delle onde smorzate, lo spostamento elastico è localmente funzione sinusoidale del tempo, il cui periodo T dipende dallo smorzamento secondo la formula:

$$(16) \quad T = \frac{2\pi \sqrt{\mu(\lambda + \mu)}}{\sqrt{\mu(\lambda + 2\mu)(k^2 - 1)}} \frac{1}{\beta}.$$

La determinazione sperimentale di T può quindi servire alla determinazione del coefficiente di smorzamento β .

§ 2. — Dalle (14) si deduce che, affinché lo spostamento elastico in un punto P sia contenuto nel piano passante per P e per l'asse z , è necessario che le funzioni ψ_1 e ψ_2 dipendano esclusivamente dalla variabile r definita dalla relazione:

$$(17) \quad r = x^2 + y^2.$$

Ora le onde sismiche della « fase di RAYLEIGH » sono generalmente onde a vibrazioni orizzontali-longitudinali e verticali: ne segue che se assumiamo come asse z la retta congiungente l'ipocentro coll'epicentro, per rappresentare le onde della « fase di RAYLEIGH », dovremo imporre alle funzioni ψ_1 e ψ_2 di essere funzioni della sola r e di essere quindi soluzioni dell'equazione:

$$(18) \quad \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} + \gamma^2\psi = 0.$$

È noto che le soluzioni di (18) sono combinazioni lineari delle due funzioni $I_0(\gamma r)$ e $Y_0(\gamma r)$, ove I_0 e Y_0 sono le due funzioni di BESSEL di prima e di seconda specie e di ordine 0:

$$(19) \quad I_0(x) = \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{\Pi^2(k)}$$

$$(19') \quad Y_0(x) = -\frac{2}{\pi} \left\{ I_0 \lg \frac{x}{2} - \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{\Psi(k)}{\Pi^2(k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \right\}$$

$$(19'') \quad \Pi(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \dots n}{(1 + \lambda) \dots (n + \lambda)} n^\lambda; \quad \Psi(\lambda) = \frac{\Pi'(\lambda)}{\Pi(\lambda)}.$$

La funzione ψ considerata nel paragrafo precedente :

$$(20) \quad \psi = \psi_1 \operatorname{sen} \delta t + \psi_2 \operatorname{cos} \delta t$$

si potrà quindi scrivere nella forma :

$$(20') \quad \psi = A \operatorname{cos} (\delta t + p) I_0(\gamma r) + B \operatorname{sen} (\delta t + q) Y_0(\gamma r).$$

Ciò posto, cominciamo a vedere come si debbano scegliere le costanti A , B , p , q affinchè la (20') definisca un'onda divergente dall'origine. A tal uopo ricordiamo che, per r molto grande, le funzioni I_0 e Y_0 si comportano come il seno e il coseno :

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_0(\gamma r) \propto \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma r}} \operatorname{sen} (\gamma r - \pi/4) \\ Y_0(\gamma r) \propto \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma r}} \operatorname{cos} (\gamma r - \pi/4). \end{array} \right.$$

Segue da (20') e da (21) che, per r molto grande, sarà :

$$(21') \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma r}} \left\{ A [\operatorname{sen} (\gamma r + \delta t + p) + \operatorname{sen} (\gamma r - \delta t - p)] + \right. \\ \left. + B [\operatorname{sen} (\gamma r + \delta t + q) \operatorname{sen} (\gamma r - \delta t - q)] \right\}$$

da cui si vede che, affinchè la ψ definisca un'onda divergente dall'origine, deve essere :

$$A = -B. \quad p = q.$$

Scegliendo allora l'origine dei tempi in modo che $p=0$, la ψ si potrà scrivere definitivamente nella forma :

$$(22) \quad \psi = B \sqrt{I_0^2(\gamma r) + Y_0^2(\gamma r)} \operatorname{sen} \left(\delta t - \operatorname{arctg} \frac{I_0(\gamma r)}{Y_0(\gamma r)} \right).$$

Fissiamo una volta per tutte la determinazione della funzione $\operatorname{arctg} \frac{I_0(\gamma r)}{Y_0(\gamma r)}$; precisamente conveniamo di scegliere, per $r=0$, la determinazione 0 , e per gli altri valori di r quella determinazione per cui la funzione $\operatorname{arctg} \frac{I_0(\gamma r)}{Y_0(\gamma r)}$ risulti una funzione continua di r . Con questa convenzione è facile vedere che la funzione $\operatorname{arctg} \frac{I_0(\gamma r)}{Y_0(\gamma r)}$ è una funzione crescente di r .

Ciò premesso, poniamo :

$$\begin{aligned}
 \psi &= B \sqrt{I_0^2(\gamma r) + Y_0^2(\gamma r)} \operatorname{sen} \left(\delta t - \operatorname{arctg} \frac{I_0(\gamma r)}{Y_0(\gamma r)} \right) \\
 &\quad \text{se } 0 < \delta t - \operatorname{arctg} \frac{I_0(\gamma r)}{Y_0(\gamma r)} < 2n\pi \\
 \psi &= 0 \sqrt{I_0^2(\gamma r) + Y_0^2(\gamma r)} \operatorname{sen} \left(\delta t - \operatorname{arctg} \frac{I_0(\gamma r)}{Y_0(\gamma r)} \right) \\
 &\quad \text{se } \delta t - \operatorname{arctg} \frac{I_0(\gamma r)}{Y_0(\gamma r)} < 0 \\
 &\quad \text{se } \delta t - \operatorname{arctg} \frac{I_0(\gamma r)}{Y_0(\gamma r)} > 2n\pi
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Dalle formule (20) e (14) si vede allora che, se la ψ soddisfa la relazione (23), le funzioni u , v , w definite dalle relazioni :

$$\begin{aligned}
 u &= (\varepsilon e^{-k\beta z} + e^{-\beta z}) \frac{\partial \psi}{\partial x} \\
 v &= (\varepsilon e^{-k\beta z} + e^{-\beta z}) \frac{\partial \psi}{\partial y} \\
 w &= - \left(k\beta \varepsilon e^{-k\beta z} + \frac{\gamma^2}{\beta} e^{-\beta z} \right) \psi
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

rappresentano nel piano π (e in ogni piano parallelo) un'onda solitaria, in forma di corona circolare, divergente dall'origine, e dovuta a una perturbazione epicentrale di durata $\frac{2n\pi}{\delta}$.

Dalla formula (21) si vede che, per grandi valori di r , la ψ si può rappresentare approssimativamente nella forma :

$$\psi = B \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma r}} \operatorname{sen} (\delta t - \gamma r + \pi/4)
 \tag{25}$$

da cui si riscontra che a grande distanza le nostre soluzioni danno gli stessi risultati delle soluzioni piane sinusoidali di Lord RAYLEIGH. Dalla formula (25) si vede inoltre che a grande distanza si può parlare in modo preciso di una lunghezza d'onda Λ e di una velocità di propagazione V ; precisamente si trova che la lunghezza d'onda dipende dallo smorzamento, come risulta dalla relazione :

$$\Lambda = \frac{2\pi \sqrt{\lambda + \mu}}{\sqrt{(\lambda + 2\mu)k^2 - \mu} \beta}
 \tag{26}$$

mentre la velocità è indipendente dallo smorzamento :

$$V = \sqrt{\frac{\mu(\lambda + 2\mu)(k^2 - 1)}{\rho[(\lambda + 2\mu)k^2 - \mu]}}$$

Infine si deduce immediatamente dalle formole (24) che, a grande distanza dall'epicentro e nel piano $z=0$, il rapporto τ fra l'ampiezza delle vibrazioni verticali e l'ampiezza delle vibrazioni orizzontali è dato dalla relazione :

$$(27) \quad \tau = \frac{\sqrt{\lambda + \mu}(\lambda + 2\mu)(k^2 - 1)k}{\sqrt{(\lambda + 2\mu)k^2 - \mu} \{ (\lambda + 2\mu)k^2 - 2(\lambda + \mu)k + \lambda \}}$$

Inoltre le vibrazioni verticali sono sfasate di $\pi/2$ rispetto alle vibrazioni orizzontali.