Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Giuseppe Belardinelli

Su una classe di equazioni differenziali di ordine infinito

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.3, p. 155–159.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_3_155_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1934.

Su una classe di equazioni differenziali di ordine infinito.

Nota di GIUSEPPE BELARDINELLI (a Milano).

Sunto. - *L'A. considera le equazioni differenziali lineari di ordine infinito che danno una generalizzazione delle equazioni differenziali ipergeometriche di* GOURSAT. *Introduce così la nozione di funzioni ipergeometriche di ordine infinito ponendo in relazione queste funzioni con gli operatori normali di* PINCHERLE.

1. **Funzioni ipergeometriche di ordine infinito.** — Sia la serie

$$y = \sum_{0}^{\infty} c_n x^n, \tag{1}$$

ove supponiamo che il rapporto fra un coefficiente ed il precedente sia

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\varphi(n)}{\psi(n)}, \tag{2}$$

e sulle funzioni $\varphi(n)$ e $\psi(n)$ facciamo le seguenti ipotesi:

a) che il rapporto

$$\frac{|\varphi(n)|}{|\psi(n)|}$$

abbia limite α finito per n tendente all'infinito;

(1) Cfr. U. BROGGI, *Sull'integrazione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti,* « Rendic. Ist. Lombardo », LXIII (1930). Come il D'OCAGNE, G. GUARESCHI, (*L'Algebra delle serie di potenze.* « Rendic. Ist. Lombardo », LXV (1932), pagg. 809-825), postosi il problema di determinare il coefficiente del termine generale di una serie di potenze potenza di esponente razionale di un'altra deduce *ex novo* il risultato fornito dalla formula di FAA DI BRUNO.

b) che la $\psi(z)$ non abbia radici uguali allo zero ed a numeri interi positivi [1];

c) che $\varphi(z)$ e $\psi(z)$ siano sviluppabili in serie di interpolazione di NEWTON e convergenti in un semipiano con ascissa di convergenza finita [2].

La serie (1) sarà convergente, per l'ipotesi *a)* e *b)*, in un cerchio di raggio uguale ad $1 : \alpha$.

Se le $\varphi(n)$ e $\psi(n)$ sono due polinomi *fissi*, e naturalmente ψ di grado superiore od uguale a φ (per l'ipotesi *a)*), sappiamo che la (1) è la classica serie ipergeometrica di GOURSAT, PINCHERLE, MELLIN, ecc., ed è, in questo caso, un integrale regolare nell'intorno della origine della classica equazione differenziale ipergeometrica di GOURSAT di ordine ω, se ω è il grado del polinomio $\psi(n)$.

Escluso questo caso, che φ e ψ siano ambedue polinomi, potrà accadere che sia:

1°) φ e ψ due funzioni trascendenti intere o convergenti in un semipiano e che soddisfino alla ipotesi *c)*;

2°) che φ sia un polinomio e ψ una funzione soddisfacente alla ipotesi *c)* [3].

Le serie appartenenti a questi due tipi le chiameremo *serie ipergeometriche di ordine infinito.*

2. **Equazioni differenziali ipergeometriche di ordine infinito.** Supponendo che ψ sia nella ipotesi *c)* e per considerare il caso generale, lo sia anche φ, avremo:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m x(x-1)\ldots(x-m+1), \\ \psi(x-1) &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m x(x-1)\ldots(x-m+1), \end{aligned}$$

da cui

$$(4)\qquad \begin{aligned} \varphi(n) &= \sum_{m=0}^{n} a_m n(n-1)\ldots(n-m+1), \\ \psi(n-1) &= \sum_{m=0}^{n} b_m n(n-1)\ldots(n-m+1), \end{aligned}$$

[1] Affinchè nessuno dei coefficienti sia infinito.

[2] Lo studio delle funzioni che ammettono sviluppi in serie di interpolazione di NEWTON, e qui ci riferiamo alle classiche serie di NEWTON, è stato fatto dall'illustre prof. NÖRLUND, *Leçons sur les séries d'interpolation*, « Collection Borel ». In questa Nota ci riferiamo a funzioni $\psi(z)$ e $\varphi(z)$ che ammettono questi sviluppi.

[3] Per l'ipotesi *a)* è da escludersi il caso che φ sia nell'ipotesi *c)* e ψ un polinomio.

ove i coefficienti a_n e b_n si possono calcolare facilmente

$$a_m = \frac{1}{(1, m)} \sum_{r=0}^{m} \frac{(-m, r)}{(1, r)} \varphi(m-r), \qquad b_m = \frac{1}{(1, m)} \sum_{r=0}^{m} \frac{(-m, r)}{(1, r)} \psi(m-1-r).$$

Le serie (3) avranno un semipiano di convergenza, ed al di fuori di questo semipiano potremo dire che saranno convergenti per valori interi positivi eventualmente risultassero esterni a questo semipiano.

Possiamo ora, senza togliere nulla alla generalità ammettere che $\psi(x)$ abbia per fattore $x+1$, perchè potremo sempre porre

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+1)\varphi(n)}{(n+1)\psi(n)} = \frac{\varphi_1(n)}{\psi_1(n)}.$$

Supponiamo che le φ e ψ siano in queste condizioni, avremo allora che $b_0 = 0$.

Si avrà

$$x^n \varphi(n) = a_0 x^n + a_1 x \frac{d}{dx} x^n + \ldots + a_m x^m \frac{d^m}{dx^m} x^n + \ldots a_n x^n \frac{d^n}{dx^n} x^n,$$

$$x^n \psi(n-1) = b_1 x \frac{d}{dx} x^n + \ldots + b_m x^m \frac{d^m}{dx^m} x^n + \ldots a_n x^n \frac{d^n}{dx^n} x^n.$$

somme parziali di serie convergenti e, per ogni n, nel semipiano comune di convergenza della (3) si ha:

$$x^{n+1}[c_{n+1}\psi(n) - c_n\varphi(n)] =$$

$$= b_1 x \frac{d}{dx} c_{n+1} x^{n+1} + \ldots + b_m x^m \frac{d^m}{dx^m} c_{n+1} x^{n+1} + \ldots + b_n x^n \frac{d^n}{dx^n} c_{n+1} x^{n+1} -$$

$$- x\left(a_0 c_n x^n + a_1 x \frac{d}{dx} c_n x^n + \ldots + a_m x^m \frac{d^m}{dx^m} c_n x^n + \ldots + a_n x^n \frac{d^n}{dx^n} c_n x^n\right)$$

essendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^{n+1} = y - c_0 \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = y$$

si avrà essendo, per ogni n,

$$c_{n+1}\psi(n) - c_n\varphi(n) = 0$$

che

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n x) x^n \frac{d^n y}{dx^n} = 0. \tag{5}$$

Chiameremo la (5) *equazione differenziale ipergeometrica d'ordine infinito,* ed è una generalizzazione della equazione differenziale ipergeometrica di GOURSAT

$$\sum_{n=0}^{\omega}(b_n - a_n x)x^n \frac{d^n y}{dx^n} =$$

$$= (b_\omega - a_\omega x)x^\omega \frac{d^\omega y}{dx^\omega} + \ldots + (b_1 - a_1 x)x \frac{dy}{dx} - a_0 yx = 0$$

nella quale si può, naturalmente, prescindere dal fattore x, $b_0 = 0$.

Ciò giustifica, nell'ipotesi *c)*, la denominazione data alla serie (1) di serie ipergeometriche di ordine infinito, essendo questa un integrale regolare nell'intorno della origine della (5).

3. **Operatori normali di Pincherle.** — Consideriamo il primo membro della (5), cioè l'operatore

(6) $$A(y) = \sum_{n=0}^{\infty}(b_n - a_n x)x^n \frac{d^n y}{dx^n},$$

con $b_0 = 0$.

Applicando questo operatore differenziale, che potremo chiamare *operatore differenziale ipergeometrico di ordine infinito* ad x^n, si ha:

$$A(x^n) = x^n \psi(n-1) - x^{n+1}\varphi(n).$$

Chiamando con PINCHERLE operatori normali di rango r (1) quelli per cui

$$A(x^n) = \gamma_n x^n + \gamma_{n-1} x^{n+1} + \ldots + \gamma_{n+r} x^{n+r}$$

avremo che l'operatore (6) è un operatore normale di rango uno.

L'operatore duale della (6), cioè l'operatore che trasforma i coefficienti generici di una serie di potenze è

(7) $$\bar{A}(c_n) = c_{n+1}\psi(n) - c_n \varphi(n).$$

Le serie ipergeometriche (1) per le quali

(8) $$c_{n+1}\psi(n) - c_n \varphi(n) = 0,$$

tali cioè che i coefficienti soddisfano alla equazione, alle differenze (8) sono dunque fondamentali per gli operatori ipergeometrici d'ordine infinito e caratterizzano l'operatore A^{-1} (2).

Inoltre le serie (1) possono pensarsi ottenute mediante operatori di rango zero

$$A(x^n) = c_n x^n,$$

(1) PINCHERLE, « Annali di Matematica », T. IV, S. III, 1900, p. 219.

(2) Id., « Rendic. Accademia di Bologna », 7 Maggio 1933.

ove i c_n prendano particolari espressioni. Lo studio dunque di questi particolari operatori di rango zero risulta fondamentale per quanto abbiamo veduto, e lo studio degli operatori di rango zero

$$c_{n+1} = \frac{(\alpha_1 + n) \dots (\alpha_r + n)}{(\beta_1 + n) \dots (\beta_s + n)} c^n,$$

che chiameremo *operatori ipergeometrici di ordine s*, sarà esposto in altre pubblicazioni.