
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UGO BROGGI

Sulla risoluzione delle equazioni ricorrenti

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 13 (1934), n.3, p. 153–155.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_3_153_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_3_153_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1934.

Sulla risoluzione delle equazioni ricorrenti.

Nota di UGO BROGGI (a Milano).

Sunto. - *Il problema della determinazione della soluzione più generale dell'equazione ricorrente $c_0 + a_1c_{v-1} + \dots + a_nc_{v-n} = b_v$, dove $a_1, \dots, a_n, b_n, b_{n+1}, \dots$ sono costanti e $v = n, n+1, \dots$, è risolto ove si determini il coefficiente del termine generale dello sviluppo di $\frac{1}{1 + a_1x + \dots + a_nx^n}$ in serie di potenze di x .*

Due Note recenti ⁽¹⁾, aventi come oggetto la determinazione della soluzione più generale $c_0, c_1, \dots$ dell'equazione ricorrente

$$c_v + a_1c_{v-1} + \dots + a_nc_{v-n} = b_v$$

$$(a_n \neq 0; \quad v = n, n+1, \dots)$$

⁽¹⁾ I. J. SCHWATT, *Il termine generale di una successione ricorrente finita del secondo ordine*, « Rendic. Lincei », XVII (1933), pagg. 909-917; A. MAMBRIANI, *Sulla risoluzione delle equazioni ricorrenti lineari d'ordine finito e a coefficienti costanti*, Ibid., XIX (1934), pagg. 16-21.

(in casi particolari, la prima, qualunque siano $a_0, a_1, \dots, a_n$, costanti, come lo sono $b_n, b_{n+1}, \dots$ l'altra) non tengono conto esplicitamente del fatto che il problema si riduce a quello della determinazione del coefficiente del termine generale dello sviluppo in serie di potenze di x della reciproca del polinomio

$$(1) \quad 1 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

È infatti, se

$$1 = (1 + a_1x + \dots + a_nx^n)(1 + \gamma_1x + \gamma_2x^2 + \dots)$$

e se le costanti $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ essendo qualunque, sussiste l'uguaglianza formale (poichè potrebbe essere nullo il raggio di convergenza della serie $b_0 + b_1x + \dots$ e pertanto quello dell'altra $c_0 + c_1x + \dots$)

$$(2) \quad \begin{aligned} (b_0 + b_1x + \dots)(1 + \gamma_1x + \dots) &= c_0 + c_1x + \dots \\ c_r &= b_0\gamma_r + b_1\gamma_{r-1} + \dots + b_r \\ (r=0, 1, \dots; \quad \gamma_{-1} = \gamma_{-2} = \dots = \gamma_{-(n-r)}) &= 0. \end{aligned}$$

Se sono note le radici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, uguali o distinte, di (1), è, come dimostrava (credo per il primo) il D'OCAGNE ⁽¹⁾ e passava dalla sua Memoria sulle serie ricorrenti ai manuali di analisi algebrica, ed è di immediata dimostrazione

$$(3) \quad \begin{aligned} y_r &= \Sigma \alpha_1^{h_1} \alpha_2^{h_2} \dots \alpha_n^{h_n} \\ (h_1 + h_2 + \dots + h_n &= r) \end{aligned}$$

mentre il problema di determinare γ_r esplicitamente in funzione di $r, a_1, a_2, \dots, a_n$ si risolve applicando alla determinazione del valore corrispondente ad $x=0$ della derivata r -esima rispetto ad x della reciproca di (1) una qualsiasi delle formule (di FAA DI BRUNO ⁽²⁾, di SCHLÖMILCH, ...) definenti la derivata r -esima di una funzione di funzione.

Il risultato al quale perviene il D'OCAGNE

$$(4) \quad \gamma_r = \Sigma (-1)^s \frac{s!}{h_1! h_2! \dots h_n!} a_1^{h_1} a_2^{h_2} \dots a_n^{h_n},$$

dove

$$\begin{aligned} h_1 + h_2 + \dots + h_n &= s \\ h_1 + 2h_2 + \dots + nh_n &= r, \end{aligned}$$

⁽¹⁾ M. D'OCAGNE, *Mémoire sur les séries récurrentes*, « Journal de l'École Polytech. », LXIV (1894), pagg. 151-224.

⁽²⁾ « Ann. di Sc. Mat. e Fis. », (6), 1855, pagg. 479-480.

è quello che la formula di FAA DI BRUNO permette di scrivere senz'altro ⁽¹⁾.

Si ottengono due formule risolutive esprimenti c , esplicitamente in funzione delle radici del polinomio, la prima, dei coefficienti dello stesso, la seconda, sostituendo nella (2) le espressioni di γ , fornite dalla (3) e dalla (4).

Il MAMBRIANI le dà entrambe, e ne aggiunge una terza: altre si potrebbero avere utilizzando espressioni diverse della derivata r -esima di una funzione di funzione.

(1) Cfr. U. BROGGI, *Sull'integrazione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti*, « Rendic. Ist. Lombardo », LXIII (1930). Come il D'OCAGNE, G. GUARESCHI, (*L'Algebra delle serie di potenze*, « Rendic. Ist. Lombardo », LXV (1932), pagg. 809-825), postosi il problema di determinare il coefficiente del termine generale di una serie di potenze potenza di esponente razionale di un'altra deduce *ex novo* il risultato fornito dalla formula di FAA DI BRUNO.