
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

BASILIO MANIÀ

Sopra un esempio di Lavrentieff

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 13 (1934), n.3, p. 147–153.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_3_147_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_3_147_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1934.

Sopra un esempio di Lavrentieff.

Nota di BASILIO MANIÀ (a Pisa) ⁽¹⁾.

Sunto. - *Si semplifica notevolmente e si estende agli integrali doppi un esempio di LAVRENTIEFF relativo all'approssimazione di un integrale*

$$I_C = \int_C f(x, y, y') dx.$$

In una sua Memoria degli « Annali di Matematica » ⁽²⁾ il LAVRENTIEFF ha dimostrato che il valore di un integrale

$$I_C = \int_C f(x, y, y') dx$$

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

⁽²⁾ M. LAVRENTIEFF, *Sur quelques problèmes du calcul des variations*. « Ann. di Mat. », Tomo IV, (1926), pagg. 7-28, e specialmente pagg. 23-28.

calcolato sopra una curva assolutamente continua

$$C_0: \quad y = y_0(x), \quad (a \leq x \leq b),$$

non si può sempre approssimare mediante i valori dello stesso integrale calcolati sopra curve C di classe 1, (vale a dire, tali che le funzioni $y(x)$ corrispondenti abbiano sempre la derivata $y'(x)$ finita e continua) aventi gli stessi punti terminali di C_0 , e convergenti a questa curva.

Egli dimostra questo fatto per una funzione $f(x, y, y')$ della forma

$$f(x, y, y') = e^{-\frac{2}{(y-\sqrt{x})^2}} \varphi(y')$$

definita per $x \geq 0$ e y ed y' numeri finiti qualunque, ed osserva che per la possibilità di approssimare I_{C_0} nel modo indicato non è sufficiente ammettere che la $f(x, y, y')$ abbia tutte le derivate finite e continue. Però la funzione considerata dal LAVRENTIEFF non soddisfa a quest'ultima condizione poichè è

$$f_x(x, y, y') = -2e^{-\frac{2}{(y-\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}(y-\sqrt{x})^3} \varphi(y')$$

e, per $x=0$ e $y \neq 0$, è

$$f_x(x, y, y') = +\infty$$

(essendo la funzione $\varphi(y')$ considerata dal LAVRENTIEFF sempre > 0).

Noi ci proponiamo di dare un esempio analogo a quello del LAVRENTIEFF ricorrendo a una funzione $f(x, y, y')$ razionale intera in x, y, y' e di dimostrare l'impossibilità dell'approssimazione di I_{C_0} , nel modo indicato sopra, anche senza la condizione relativa ai punti terminali.

Dall'esempio addotto per gli integrali semplici ne deduciamo poi uno per gli integrali doppi, provando così, anche per questi integrali, la proposizione già data per quelli semplici; e in questo caso l'aver abbandonato la condizione relativa al contorno ha una certa importanza perchè nelle condizioni sufficienti relative alla approssimazione dagli integrali doppi date finora questa condizione non compare ⁽¹⁾.

1. Sia, per x, y, y' , numeri finiti qualunque,

$$f(x, y, y') = (y^3 - x)^2 y'^{2n}$$

⁽¹⁾ Vedi S. CINQUINI, *Sull'approssimazione delle funzioni di due variabili reali*. « Ann. di Mat. », Tomo XI, (1932), pagg. 295-323.

con n numero intero ≥ 3 , e consideriamo la curva assolutamente continua

$$C_0: \quad y = \sqrt[3]{x}, \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Per ogni numero ξ soddisfacente alle disuguaglianze

$$0 < \xi \leq \frac{1}{2},$$

indichiamo con $A(\xi)$ l'area compresa fra i due archi

$$y = \frac{1}{4} \sqrt[3]{x}, \quad (\xi \leq x \leq 2\xi),$$

$$y = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x}, \quad (\xi \leq x \leq 2\xi),$$

e le parallele all'asse delle y

$$x = \xi, \quad x = 2\xi.$$

Il minimo di $(y^3 - x)^2$ in $A(\xi)$ è dato da

$$\varepsilon(\xi) = \frac{49}{64} \xi^2,$$

e quindi, se γ è un qualunque arco di curva assolutamente continua tutto appartenente ad $A(\xi)$ e sul quale esista finito l'integrale

$$I_\gamma = \int_\gamma (y^3 - x)^2 y'^{2n} dx,$$

si ha

$$I_\gamma > \frac{49}{64} \xi^2 \int_\gamma y'^{2n} dx \geq \frac{49}{64} \xi^2 \frac{(y_2 - y_1)^{2n}}{(x_2 - x_1)^{2n-1}},$$

avendo indicato con (x_1, y_1) e (x_2, y_2) le coordinate degli estremi di γ ⁽¹⁾.

Ne segue che se è

$$(1) \quad (x_1, y_1) = \left(\xi, \frac{1}{4} \sqrt[3]{\xi} \right) \quad \text{e} \quad x_2 = 2\xi,$$

si ha

$$I_\gamma > \frac{49}{64} \xi^2 \frac{\left(\frac{1}{4} \sqrt[3]{2\xi} - \frac{1}{4} \sqrt[3]{\xi} \right)^{2n}}{\xi^{2n-1}} = \frac{49 \cdot (\sqrt[3]{2} - 1)^{2n}}{64 \cdot 4^{2n}} \cdot \xi^{\frac{9-4n}{3}},$$

(1) Si ricordi che il minimo di un integrale della forma $\int_C f(y') dx$ nella

classe delle curve congiungenti due punti fissi è dato dal segmento che ha gli estremi in quei punti.

e poichè per $\xi \rightarrow 0$ il secondo membro di questa disuguaglianza tende a $+\infty$, esiste un numero $m_1 > 0$, indipendente da ξ , tale che, nelle ipotesi fatte, sia sempre

$$(2) \quad I_\gamma \geq m_1.$$

Se invece delle (1) supponiamo soddisfatte le relazioni

$$(3) \quad (x_1, y_1) = \left(\xi, \frac{1}{4} \sqrt[3]{\xi} \right), \quad y_2 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2},$$

si ha

$$I_\gamma > \frac{49}{64} \xi^2 \frac{\left(\frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2} - \frac{1}{4} \sqrt[3]{\xi} \right)^{2n}}{(x_2 - \xi)^{2n-1}} \geq \frac{49}{64} \xi^2 \min_{\left(\xi \leq x_2 \leq 2\xi \right)} \frac{\left(\frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2} - \frac{1}{4} \sqrt[3]{\xi} \right)^{2n}}{(x_2 - \xi)^{2n-1}}.$$

Studiamo ora la funzione

$$(4) \quad \frac{\left(\frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2} - \frac{1}{4} \sqrt[3]{\xi} \right)^{2n}}{(x_2 - \xi)^{2n-1}}$$

per x_2 variabile nell'intervallo $(\xi, 2\xi)$.

Al tendere di x_2 a ξ l'espressione (4) tende a $+\infty$, e quindi il minimo di essa nell'intervallo $(\xi, 2\xi)$ esiste ed è dato da $x_2 = 2\xi$, nel quale caso risulta soddisfatta la (2), oppure è dato da un certo valore

$$x_2 = \alpha \xi$$

con

$$1 < \alpha < 2.$$

Supposto che si verifichi questo secondo caso, si deve avere

$$\frac{d}{dx_2} \left[\frac{\left(\frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2} - \frac{1}{4} \sqrt[3]{\xi} \right)^{2n}}{(x_2 - \xi)^{2n-1}} \right]_{x_2 = \alpha \xi} = 0,$$

e quindi

$$n(x_2 - \xi) - 3(2n-1) \sqrt[3]{x_2^2} \left(\frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2} - \frac{1}{4} \sqrt[3]{\xi} \right) = 0, \quad \text{per } x_2 = \alpha \xi.$$

Ne segue che α soddisfa all'equazione, indipendente da ξ ,

$$n(\alpha - 1) - 3(2n-1) \sqrt[3]{\alpha^2} \left(\frac{1}{2} \sqrt[3]{\alpha} - \frac{1}{4} \right) = 0.$$

Dunque, nel caso ora considerato, si ha

$$I_\gamma > \frac{49}{64} \frac{\left(\frac{1}{2} \sqrt[3]{\alpha} - \frac{1}{4} \right)^{2n}}{(\alpha - 1)^{2n-1}} \xi^{\frac{9-4n}{3}},$$

ed esiste un numero positivo m_2 , indipendente da ξ , tale che, nelle ipotesi fatte, si abbia sempre

$$I_\gamma \geq m_2.$$

Infine se γ è un arco i cui estremi soddisfano alle condizioni

$$\frac{1}{2} \leq x_1 < x_2 \leq 1, \quad y_1 = \frac{1}{4} \sqrt[3]{x_1}, \quad y_2 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2},$$

e sul quale sia sempre

$$\frac{1}{4} \sqrt[3]{x} \leq y(x) \leq \frac{1}{2} \sqrt[3]{x},$$

si ha

$$I_\gamma > \frac{49}{64} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2} - \frac{1}{4} \sqrt[3]{x_1} \right)^{2n}}{(x_2 - x_1)^{2n-1}},$$

e, indicato con m_3 il minimo del secondo membro di questa disuguaglianza per $\frac{1}{2} \leq x_1 < x_2 \leq 1$, si ha

$$I_\gamma \geq m_3.$$

Indichiamo con m il più piccolo dei tre numeri m_1 , m_2 , m_3 .

2. Sia

$$C: \quad y = y(x),$$

una curva con $y(x)$ a rapporto incrementale limitato, e tale che i suoi punti terminali sieno $(0, 0)$ e $(1, 1)$, oppure un punto qualunque interno all'intervallo $(0, 1)$ dell'asse delle x e il punto $(1, 1)$.

Sopra la curva C vi sarà almeno un arco γ avente il primo estremo sopra la curva

$$y = \frac{1}{4} \sqrt[3]{x}, \quad (0 \leq x \leq 1),$$

il secondo estremo sopra la curva

$$y = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x}, \quad (0 \leq x \leq 1),$$

e tale che sopra di esso sia sempre

$$\frac{1}{4} \sqrt[3]{x} \leq y(x) \leq \frac{1}{2} \sqrt[3]{x}.$$

Se, essendo (x_1, y_1) le coordinate del primo estremo di γ , è $x_1 \leq \frac{1}{2}$, si ha certamente

$$I_\gamma \geq m_1 \quad \text{oppure} \quad I_\gamma \geq m_2;$$

se $x_1 > \frac{1}{2}$, si ha

$$I_r \geq m_1.$$

Dunque, in ogni caso

$$I_r \geq m.$$

Poichè

$$I_C \geq I_r,$$

e

$$I_{C_0} = 0,$$

si vede di qua che la curva C_0 non può essere approssimata mediante curve C a rapporto incrementale limitato (e quindi tanto meno mediante curve di classe 1), le quali abbiano in comune con essa i punti terminali, in modo che gli integrali I_C approssimino I_{C_0} .

3. Se invece di considerare la curva

$$C_0: \quad y = \sqrt[3]{x}, \quad (0 \leq x \leq 1),$$

consideriamo la curva

$$C'_0: \quad y = \sqrt[3]{x}, \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

si vede che

$$I_{C'_0} = 0,$$

mentre sopra le curve C' a rapporto incrementale limitato che appartengono propriamente a un intorno sufficientemente piccolo di C'_0 , è sempre

$$I_C \geq m > 0,$$

indipendentemente dalla condizione che abbiano in comune con C'_0 i punti terminali.

4. Posto ora

$$f(x, y, z, p, q) = (z^3 - x)^2 (p^{2n} + q^{2n})$$

con n intero ≥ 3 , e considerata la superficie assolutamente continua nel senso di TONELLI,

$$S_0: \quad z = \sqrt[3]{x}, \quad (-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1),$$

si vede che

$$I_{S_0} = \iint_{S_0} f(x, y, z, p, q) dx dy = 0.$$

Per ogni altra superficie assolutamente continua S per la quale

l'integrale I_S esista finito si ha

$$I_S = \iint_S (z^3 - x)^2 (p^{2n} + q^{2n}) dx dy \geq \iint_S (z^3 - x)^2 p^{2n} dx dy = \int dy \int (z^3 - x)^2 p^{2n} dx.$$

Ora se la superficie S è a rapporto incrementale limitato, tale è anche ogni sua sezione con un piano $y = \text{cost.}$, e se S appartiene propriamente a un intorno sufficientemente piccolo di S_0 , per ogni y fissato fra $-\frac{1}{2}$ e $+\frac{1}{2}$, l'integrale

$$\int (z^3 - x)^2 p^{2n} dx,$$

calcolato sulla corrispondente sezione di S , è $> m$, per quanto si è detto nel n.º precedente, e quindi

$$\iint_S (z^3 - x)^2 (p^{2n} + q^{2n}) dx dy > \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} m dy = m.$$

Risulta così dimostrato che la superficie S_0 non può essere approssimata mediante superficie $S: z = f(x, y)$ con $f(x, y)$ a derivate parziali del primo ordine continue in modo che anche l'integrale I_{S_0} risulti approssimato dagli integrali I_S .