
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LUIGI CASTOLDI

Sulla non necessità logica del Postulato caratteristico dei Solidi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **13** (1934), n.3, p. 145–147.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_3_145_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_3_145_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1934.

PICCOLE NOTE

Sulla non necessità logica del Postulato caratteristico dei Solidi.

Nota di LUIGI CASTOLDI (a Pavia).

Sunto. - *Si dimostra come la sufficienza delle equazioni cardinali della Statica per l'equilibrio di un solido, consegua, indipendentemente dal postulato caratteristico dei solidi, dalle equazioni cardinali della Dinamica e dalla formula fondamentale della Cinematica.*

Nello studio della Statica dei Solidi si suole introdurre il cosiddetto « Postulato caratteristico dei Solidi », il quale, sotto la sua forma definitiva, si può enunciare: « l'equilibrio di un solido non si altera quando al sistema delle forze effettivamente agenti su di esso si sostituisca un qualunque altro sistema di forze equivalente (vettorialmente) al primitivo » ⁽¹⁾.

È da esso che ordinariamente si deduce che le equazioni cardinali della Statica: $\mathbf{R} = 0$, $\mathbf{M} = 0$ ($\mathbf{R}$, $\mathbf{M}$ rispettivamente risultante e momento risultante delle forze esterne), necessarie per l'equilibrio di un qualunque sistema materiale, sono per i solidi altresì sufficienti.

Mostreremo che, ammessa l'ipotesi di rigidità dei solidi, tale sufficienza si deduce dai principi fondamentali della Dinamica, indipendentemente dal postulato caratteristico; e che, quindi, esso è logicamente sovrabbondante.

Ricordiamo infatti che, indicando con $\mathbf{Q}$, $\mathbf{K}$ le quantità di moto e il momento delle quantità di moto di un qualunque sistema materiale soggetto a forze esterne di risultante $\mathbf{R}$ e momento risultante $\mathbf{M}$, le equazioni cardinali della Dinamica si scrivono:

$$(1) \quad \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R}; \quad \frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M} \quad (2)$$

(1) LEVI-CIVITA e AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*, vol. I, capitolo XIII, n. 1.

(2) LEVI-CIVITA e AMALDI, loc. cit., vol. II, cap. V, nn. 5, 10.

(dove i momenti vanno calcolati rispetto a un punto fisso o al baricentro, e le derivazioni si intendono eseguite con riferimento a una terna galileiana).

Se consideriamo un sistema di forze esterne per cui sia $\mathbf{R} = 0$, $\mathbf{M} = 0$, dalle (1) consegue:

$$(2) \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0; \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_0$$

(con $\mathbf{Q}_0$, $\mathbf{K}_0$, vettori costanti). Supposto inoltre che in un certo istante sia $\mathbf{Q} = 0$, $\mathbf{K} = 0$, i vettori a secondo membro delle (2) dovranno assumersi nulli, e sarà ad ogni istante:

$$(2') \quad \mathbf{Q} = 0; \quad \mathbf{K} = 0.$$

Ciò vale, ripetiamo, per un sistema materiale qualunque.

Supponiamo ora che si tratti di un sistema rigido Σ : detta $\mathbf{v}_P$ la velocità di un generico suo punto P , tutto si riduce a dimostrare che, in base alle (2'), risulta costantemente $\mathbf{v}_P = 0$.

Allo scopo ricordiamo la formula fondamentale della Cinematica dei sistemi rigidi, la quale, ove si assuma il baricentro G del sistema come polo di riferimento, si scrive:

$$(3) \quad \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_G + \omega \wedge (P - G).$$

Se teniamo conto del Teorema del baricentro:

$$(4) \quad m\mathbf{v}_G = \mathbf{Q} \quad (1),$$

dove m indica la massa totale di Σ , e si confronta la (4) colla prima delle (2'), si conclude immediatamente che è $\mathbf{v}_G = 0$; ossia che il baricentro è fisso.

Dopo ciò la (3) diventa:

$$(3') \quad \mathbf{v}_P = \omega \wedge (P - G).$$

Assumiamo ora come terna cartesiana di riferimento la terna (solidale) avente l'origine in G e gli assi x , y , z coincidenti cogli assi del nocciolo centrale d'inerzia del sistema Σ .

Se diciamo A , B , C i momenti principali d'inerzia relativi a G ; p , q , r le componenti di ω ; K_x , K_y , K_z le componenti del momento delle quantità di moto sugli assi x , y , z , si ha notoriamente (2):

$$(5) \quad K_x = Ap; \quad K_y = Bq; \quad K_z = Cr.$$

Ricordiamo poi che se si pone, colle notazioni in uso:

$$s_1 = \sum_i m_i x_i^2; \quad s_2 = \sum_i m_i y_i^2; \quad s_3 = \sum_i m_i z_i^2,$$

(1) LEVI-CIVITA e AMALDI, loc. cit., vol. II, cap. V, n. 5.

(2) LEVI-CIVITA e AMALDI, loc. cit., vol. II, cap. IV, n. 19.

le sommatorie estendendosi a tutti i punti del sistema Σ , si ha:

$$A = s_2 + s_3; \quad B = s_3 + s_1; \quad C = s_1 + s_2.$$

Da queste relazioni segue che, essendo le s_i tre numeri essenzialmente positivi, l'annullarsi di due delle A, B, C implica l'annullarsi della terza; cosicchè, dovendo considerare, come faremo fra breve, i vari casi di annullamento delle A, B, C , basterà limitarsi a quelli in cui si annullano o una soltanto fra esse, o tutte e tre contemporaneamente.

Ciò premesso dalle (5) segue immediatamente che se nessuna delle A, B, C è nulla, l'annullarsi di $\mathbf{K}$, conformemente alla seconda delle (2'), implica l'annullarsi di ω ; cosicchè per la (3) si ha: $\mathbf{v}_p = 0$.

Che se poi uno soltanto dei momenti principali d'inerzia, per es. C è nullo, ancora per la seconda delle (2') e per la (5) risulta, con $p = q = 0$, r indeterminato.

Ma ciò significa che Σ si riduce a una distribuzione di punti materiali su una retta (asse delle z) e che tale retta è pure la direzione di ω ; e in tali condizioni evidentemente il sistema Σ risulta ancora fisso qualunque sia la grandezza $|r|$, rimasta arbitraria, di ω .

Nel caso infine in cui sia $A = B = C = 0$, il sistema Σ si riduce ad un unico punto (baricentro G) che già sappiamo essere fisso in virtù della (4).

Con ciò il nostro asserto è completamente provato.