
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

DARIO GRAFFI

Sopra un caso speciale del problema dei due corpi di massa variabile

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **13** (1934), n.2, p. 95–100.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_2_95_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_2_95_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1934.

Sopra un caso speciale del problema dei due corpi di massa variabile.

Nota di D. GRAFFI (a Bologna).

Sunto. - *Si studia il problema dei due corpi con massa variabile secondo la legge del JEANS, stabilendo, sotto opportune condizioni, alcuni teoremi, con i quali si ritrovano e si completano i risultati conseguiti dal BURGATTI.*

1. Recentemente il Chiar.^{mo} prof. BURGATTI ⁽¹⁾ ha studiato il problema dei due corpi di massa variabile quando la somma m delle masse dei due corpi varia con la legge rappresentata dall'equazione differenziale:

$$(1) \quad \frac{dm}{dt} = -am^2$$

in cui a è una costante. Questo caso speciale ha notevole importanza pratica, perchè la (1) stabilisce secondo il JEANS il modo di variare della massa totale di un sistema binario, almeno quando le masse dei due componenti del sistema sono poco diverse fra loro, o quando l'una di esse è trascurabile rispetto all'altra.

Il prof. BURGATTI in base alla (1) ha determinato le condizioni per cui l'orbita ammette infiniti apsi, e definita l'eccentricità in modo opportuno, ma diverso da quello ordinario, (che è l'eccentricità dell'orbita osculatrice) ha dimostrato che detta eccentricità si mantiene costante.

(1) « Rendiconti della Reale Accademia delle Scienze di Bologna », 1928.

Noi ci proponiamo di riprendere cotesto studio partendo però da equazioni del moto opportunamente trasformate di cui abbiamo fatto uso altra volta ⁽¹⁾. Potremo così stabilire una condizione sufficiente, ma largamente verificata almeno nel caso Sole-Terra, per cui l'orbita del sistema ammette infiniti apsi. Dimosteremo così che l'eccentricità ε definita nel modo ordinario è una funzione periodica di periodo 2π dell'anomalia eccentrica u ⁽²⁾ e che le fluttuazioni di ε in un periodo sono ordinariamente molto piccole; dimodochè si potrà concludere che se la massa totale del sistema dei due corpi varia secondo la (1) l'eccentricità dell'orbita, anche definita al modo ordinario, resta praticamente costante. Di più proveremo che il prodotto della massa totale m per la distanza dei due corpi e la velocità relativa di uno rispetto all'altro divisa per m sono funzioni periodiche della u . Da ciò ritroveremo come caso particolare alcuni risultati del BURGATTI.

2. Le equazioni del moto dei due corpi da cui partiremo sono le seguenti:

$$(2) \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{dB}{B} (1 - \varepsilon^2) \frac{\cos u}{1 - \varepsilon \cos u}$$

$$(3) \quad \frac{dw}{dt} = \frac{(1 - \varepsilon^2)^2}{2\pi c^3} B^2 + \frac{dB}{2\pi B} \left\{ \frac{\sin u}{\varepsilon} + (1 - \varepsilon^2) \frac{\sin u \cos u}{1 - \varepsilon \cos u} \right\}$$

dove c è la costante delle aree, B il prodotto di m per la costante di gravitazione K , u una variabile che verrà chiamata anomalia eccentrica, perchè a tale grandezza si riduce nel caso ordinario, w un'altra variabile legata alla u dalla relazione

$$(4) \quad 2\pi w = u - \varepsilon \sin u.$$

Si dimostra poi che fra la distanza r fra due corpi la sua derivata e ε e u esistono le relazioni ⁽³⁾:

$$(5) \quad r = \frac{c^2}{B(1 - \varepsilon^2)} (1 - \varepsilon \cos u) \quad \frac{dr}{dt} = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{c} \frac{\varepsilon \sin u}{1 - \varepsilon \cos u}.$$

⁽¹⁾ « Atti Accademia delle Scienze », Torino, I sem., 1933, parte I e II.
« Rendiconti Accademia dei Lincei », I sem., 1934.

⁽²⁾ Questa grandezza verrà definita più innanzi.

⁽³⁾ Queste formule si ottengono con semplici trasformazioni dalla (21) e (23) della mia nota all'Accademia di Torino tenendo presente le relazioni (19) e che la (20) va scritta $p = \frac{\sqrt{Aa\varepsilon} \sin u}{r}$.

È opportuno trasformare un po' l'equazione (3) eliminando in base alla (4) la variabile w . Si ha subito derivando la (4) rispetto al tempo e ricordando la (2):

$$2\pi \frac{dw}{dt} = (1 - \varepsilon \cos u) \frac{du}{dt} - \operatorname{sen} u \frac{d\varepsilon}{dt} = (1 - \varepsilon \cos u) \frac{du}{dt} + \\ + \frac{\frac{dB}{dt}}{B} (1 - \varepsilon^2) \frac{\operatorname{sen} u \cos u}{1 - \varepsilon \cos u}.$$

Sostituendo questo risultato nella (3) si ottiene dopo semplici passaggi:

$$(6) \quad \frac{du}{dt} = \frac{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}} B^2}{(1 - \varepsilon \cos u) c^3} + \frac{\frac{dB}{dt}}{B} \frac{\operatorname{sen} u}{\varepsilon(1 - \varepsilon \cos u)}.$$

Si ricordi poi che per la (1), essendo $B = Km$ e indicando con b l'espressione $\frac{a}{K^2}$, si ha:

$$(7) \quad \frac{dB}{dt} = -bB^3.$$

Ora per la validità delle equazioni (2), (3), (4), (5), (6) è necessario anzitutto che la eccentricità iniziale ε_0 sia compresa fra 0 e 1. Di più la loro validità resta assicurata solo per un intervallo intorno all'origine, cioè fino a che rimane ε compresa fra 0 e 1.

Supposto dunque $0 < \varepsilon_0 < 1$ facendo altre ipotesi che ora esporremo potremo dimostrare la validità delle nostre equazioni nell'intervallo $(0, \infty)$. A questo scopo indicheremo con m_0 la massa del sistema per $t=0$ con T_0 il periodo del sistema qualora la massa fosse costante e uguale a m_0 ⁽¹⁾. La T_0 varrà $\frac{2\pi c^3}{B_0^2(1 - \varepsilon_0^2)^2}$ es-

sendo $B_0 = Km_0$. Allora consideriamo il numero:

$$\eta = am_0^2 T_0$$

e facciamo su esso le seguenti ipotesi:

$$(9) \quad \varepsilon_0 - 2\eta > 0, \quad \varepsilon_0 + 2\eta < 1$$

$$(10) \quad \left(\frac{1 - (\varepsilon_0 + 2\eta)^2}{1 - \varepsilon_0^2} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\eta}{2\pi(\varepsilon_0 - 2\eta)} > \frac{1}{2}.$$

(1) S'intende poi quando il sistema abbia eccentricità ε_0 .

Queste ipotesi nel caso del sistema Sole-Terra in cui ε_0 dell'ordine di centesimi e η (come risulta da calcoli del JEANS) dell'ordine di 10^{-13} sono largamente soddisfatte. Ma è facile verificare che queste ipotesi sono soddisfatte anche per sistemi con eccentricità superiore a $\frac{1}{100}$ purchè non troppo vicine all'unità, con massa e periodo 1000 volte maggiore del massa e della periodo del sistema Sole-Terra comprendendo così gran parte dei sistemi binari conosciuti.

Del resto le relazioni (9) e (10) sono d'immediata verifica.

Tornando alla nostra dimostrazione osserviamo che dalle equazioni del moto si deduce l'esistenza di un certo intervallo $(0, t_1)$ in cui $|\varepsilon - \varepsilon_0| < 2\eta$ e in cui sono valide le nostre equazioni. Noi proveremo appunto che t_1 non può essere finito.

In base alle nostre ipotesi si prova intanto che in $(0, t_1)$ la $\frac{du}{dt}$ è positiva e perciò la u è funzione crescente.

Difatti si ha dalla (6) ricordando la (7):

$$(11) \quad \frac{du}{dt} = \frac{B^2}{c^3} \frac{(1 - \varepsilon_0^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 - \varepsilon \cos u)} \left\{ \frac{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{\eta}{2\pi\varepsilon} \sin u \right\} \geq \\ \geq \frac{B^2}{c^3} \frac{(1 - \varepsilon_0^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 - \varepsilon \cos u)} \left\{ \frac{(1 - (\varepsilon_0 + 2\eta)^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{\eta}{2\pi(\varepsilon_0 - 2\eta)} \right\}$$

e l'ultimo membro di questa relazione per la (10) risulta sempre maggiore di zero.

Allora sempre rimanendo in $(0, t_1)$ si può dividere la (2) per la (3) e ricordando la (7) si ottiene una equazione solo fra ε e u

$$(12) \quad \frac{d\varepsilon}{du} = \frac{(1 - \varepsilon^2)b \cos u}{\frac{(1 - \varepsilon^2)^2}{c^3} - \frac{b}{\varepsilon} \sin u},$$

Equazione che si può anche scrivere:

$$(13) \quad \frac{d\varepsilon}{d(\sin u)} = \frac{(1 - \varepsilon^2)b}{\frac{(1 - \varepsilon^2)^2}{c^3} - \frac{b}{\varepsilon} \sin u}$$

e questa equazione dimostra che nell'intervallo $u_0 - u_1$ (essendo

$u_0 = u(0)$, $u_1 = u(t_1)$) la ε è una funzione di $\sin u$ cioè una funzione periodica di u con periodo 2π .

Allora, se t_1 fosse finito, lo sarebbe anche u_1 , come si deduce facilmente dalla (6).

Di più si avrebbe:

$$(14) \quad |\varepsilon(t_1) - \varepsilon_0| = |\varepsilon(u_1) - \varepsilon_0| = 2\eta.$$

Ma siccome ε è funzione di $\sin u$, preso il più piccolo valore di u , u' , maggiore di u_0 e tale che $u_1 - u_1'$ valga $2n\pi$ essendo n intero si ha: $\varepsilon(u_1) = \varepsilon(u')$ ⁽¹⁾. Allora dalla (12) risulta ricordando le (9) e (10), e che $|1 - \varepsilon^2| \leq 1$

$$\begin{aligned} & |\varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_0)| = |\varepsilon(u') - \varepsilon_0| \leq \\ & \leq \left| \int_{u_0}^{u'} \frac{(1 - \varepsilon^2) b \cos u}{\frac{3}{(1 - \varepsilon^2)^2} - \frac{b}{\varepsilon} \sin u} du \right| < \int_{u_0}^{u'} \frac{2\eta}{2\pi} du \leq 2\eta, \end{aligned}$$

che è in contraddizione con la (14). Perciò t_1 deve avere un valore non finito, vale a dire le nostre equazioni e le loro conseguenze sono valide per un intervallo di grandezza qualunque.

3. Si deduce subito da quanto precede che essendo ε funzione di $\sin u$, la ε è una funzione periodica della u di periodo 2π . Di più le sue fluttuazioni sono sempre inferiori a 2η , grandezza nei casi pratici molto piccola perciò la ε si può ritenere praticamente costante.

Dalla (11) si ha poi che $\frac{du}{dt}$ è sempre maggiore di $\frac{B^2}{2c^3(1 + \varepsilon_0 + 2\eta)}$.

Ora dalla (1) si deduce facilmente le espressioni di B in termini finiti nella seguente forma: $B = \frac{B_0}{\sqrt{1 + 2bB_0^2 t}}$. Sostituendo questi risultati nella (11) e integrando si ha:

$$u - u_0 > \frac{B_0^2}{2c^3(1 + \varepsilon_0 + 2\eta)} \frac{1}{2bB_0^2} \log(1 + 2bB_0^2 t)$$

il che dimostra che u tende all'infinito con t . Allora u assume infinite volte un valore multiplo di π e per la seconda delle (5) la $\frac{dr}{dt}$ si annulla infinite volte come nel caso del BURGATTI.

(1) Sarà ovviamente $|u' - u_0| \leq 2\pi$.

Consideriamo ora l'espressione, di Br in base alla prima delle (5)

$$Br = \frac{c^2}{1 - \varepsilon^2} (1 - \varepsilon \cos u).$$

Essendo ε funzione periodica di u ne risulta che Br è pure una funzione periodica di u . Cioè si ha il teorema: il prodotto della massa del sistema dei due corpi per la loro distanza è una funzione periodica della anomalia eccentrica. In particolare la Br assume lo stesso valore nell'apoastro e nel periastro, risultato già conseguito dal BURGATTI per altra via.

Infine ricordando che la velocità v vale:

$$\begin{aligned} v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2}} &= B \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2}{c^2} \left(\frac{\varepsilon \sin u}{1 - \varepsilon \cos u}\right)^2 + \frac{(1 - \varepsilon^2)^2}{c^2 (1 - \varepsilon \cos u)^2}} \\ &= \frac{B}{c(1 - \varepsilon \cos u)} \sqrt{(1 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2 \cos^2 u)}. \end{aligned}$$

Ne segue che il prodotto $\frac{v}{B}$ è una funzione periodica dell'anomalia eccentrica u .

Restono così dimostrati tutti i teoremi enunciati in principio.