Bollettino Unione Matematica Italiana

Beniamino Segre

Intorno alla parità di alcuni caratteri di una varietà algebrica di dimensione dispari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.2, p. 93–95.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_2_93_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1934.

Intorno alla parità di alcuni caratteri di una varietà algebrica di dimensione dispari.

Nota di BENIAMINO SEGRE (a Bologna).

Sunto. - *L'invariante di* ZEUTHEN-SEGRE *ed il* grado virtuale del sistema canonico *di una qualunque* V_n *algebrica di dimensione* n *dispari, sono sempre numeri pari; se inoltre* V_n *è un'ipersuperficie di* S_{n+1} *a singolarità normali, anche la sua* classe *è un numero pari.*

1. È noto che una varietà topologica bilatera M_m, di dimensione $m \equiv 2$ (mod. 4), ossia di dimensione $m = 2n$ con n dispari, ammette sempre come *numero di* BETTI R_n un numero *pari* (¹). Questo fatto notevole si stabilisce nel modo più semplice, considerando su M_{2n} un sistema fondamentale

$$A_1, \quad A_2, \dots, \quad A_{R_n}$$

per i cicli di dimensione n, ed osservando che il determinante non nullo avente per elementi i relativi indici di KRONECKER (A_i, A_k) risulta emisimmetrico, poichè — per ipotesi — i cicli A hanno dimensione dispari: e questo appunto esige che l'ordine R_n del determinante stesso sia un numero pari (²).

Ciò premesso, consideriamo una qualunque V_n algebrica, di cui I_n, R_h denotino rispettivamente l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE ed il numero di BETTI di dimensione h (relativo alla riemanniana M_{2n} di V_n); fra questi numeri intercede la nota formula di ALEXANDER (³):

$$R_n = I_n + 2(-1)^n(n-1) + 2\sum_{h=1}^{n-1}(-1)^{n-h-1}R_h,$$

la quale mostra che R_n ed I_n hanno in ogni caso la stessa

(¹) Ved. S. LEFSCHETZ, *Topology*, « Colloquium Publications », vol. XII (New York, 1930), p. 218.

(²) Da qui si potrebbe facilmente dedurre, generalizzando l'analisi svolta dal LEFSCHETZ nel caso dei cicli unidimensionali [cfr. S. LEFSCHETZ, *L'analysis situs et la géométrie algébrique* (Paris, Gauthier-Villars, 1924), pp. 30 e 89], che: *Tutti i numeri di* BETTI *di dimensione dispari di una qualunque varietà algebrica, sono sempre numeri pari;* ved. pure a questo proposito S. LEFSCHETZ, *Géométrie sur les surfaces et les variétés algébriques*, Mémorial XL (Paris, Gauthier-Villars, 1929), p. 17.

(³) Ved. J. W. ALEXANDER, *Sur les cycles des surfaces algébriques et sur une définition topologique de l'invariant de Zeuthen-Segre*, « Rendic. R. Acc. Naz. dei Lincei », serie V, t. 23 (1914)₂, p. 55; cfr. pure S. LEFSCHETZ, *L'analysis situs* ecc. (cit.), p. 95.

parità. Dunque, per n dispari I_n risulta, come R_n, un numero pari, ossia:

L'invariante di ZEUTHEN-SEGRE *di una qualunque varietà algebrica di dimensione dispari, è sempre un numero pari.*

Una dimostrazione algebrico-geometrica di tale risultato si troverà in un lavoro dell'autore, di prossima pubblicazione nelle Memorie della R. Accademia d'Italia.

2. Ricordiamo la formula di C. SEGRE [1]:

$$d = I_n + 2I_{n-1} + I_{n-2},$$

che esprime il numero d dei punti doppi staccati per V_{n-1} di un fascio su di una V_n, in funzione degli invarianti di ZEUTHEN-SEGRE della V_n, della generica V_{n-1} e della V_{n-2} base del fascio. Se n è dispari, I_n ed I_{n-2} (n. 1) — e quindi pure d — risultano numeri pari; pertanto:

Il numero dei punti doppi staccati per V_{n-1} *di un fascio su di una* V_n *di dimensione dispari, è sempre un numero pari.*

Da qui segue in particolare che:

In uno spazio lineare di dimensione pari, ogni ipersuperficie avente singolarità normali è necessariamente di classe pari.

3. Nel lavoro annunciato alla fine del n. 1, sono introdotte su di una V_n algebrica (con particolare riguardo al caso di $n = 3$) diverse serie e sistemi (virtuali) di equivalenza invarianti, fra loro indipendenti, con cui si può esprimere funzionalmente ogni altro ente geometrico invariante di V_n o covariante di varietà ad essa subordinate.

Le serie di equivalenza invarianti più immediate, sono quella a cui appartengono i gruppi α caratteristici del sistema $|K|$ canonico di V_n, e quella a cui appartengono i gruppi γ canonici delle curve C caratteristiche di $|K|$. Esse però sono fra loro dipendenti: infatti simbolicamente si ha

$$\alpha \equiv (K^n), \quad C \equiv (K^{n-1});$$

e, poichè sulla curva C (virtualmente intersezione completa di $n-1$ varietà canoniche) gruppi canonici vengon segati dalle varietà equivalenti a $(n-1)K + K = nK$, così risulta

$$\gamma \equiv (nK \cdot C) \equiv n(K^n),$$

[1] C. SEGRE, *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche,* « Atti R. Acc. delle Scienze di Torino », t. 31 (1896), n. 11.

ossia:

$$\gamma = n\alpha.$$

Questo legame geometrico-funzionale fornisce la seguente relazione numerativa:

$$2(\Omega_1 - 1) = n\Omega_0,$$

fra gli invarianti relativi Ω_0 ed Ω_1 (grado e genere curvilineo virtuale del sistema canonico) di V_n. Tale relazione comprende, per $n = 2$, 3, note formule di NOETHER e di PANNELLI; ed inoltre prova che, per ogni valore dispari di n, Ω_0 assume solo valori pari. Dunque:

L'invariante Ω_0 di una qualunque varietà algebrica di dimensione dispari, è sempre un numero pari.