
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIOVANNI RICCI

Un'osservazione su un classico teorema di Liouville relativo all'irrazionalità del numero e

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 13 (1934), n.2, p. 89–92.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_2_89_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_2_89_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1934.

Un'osservazione su un classico teorema di Liouville relativo all'irrazionalità del numero e .

Nota di GIOVANNI RICCI (a Pisa).

Sunto. - Usando sostanzialmente le considerazioni già svolte da LIOUVILLE, e senza ricorrere a quelle più riposte che conducono al teorema di HERMITE, si dimostra che, qualunque sia l'intero razionale non nullo t e qualunque sia la quintupla di interi razionali non tutti nulli $(C_0, C_1, C_2, C_3, C_4)$, risulta

$$C_0 + C_1 e^{\frac{2}{t}} + C_2 e^{\frac{4}{t}} + C_3 e^{\frac{2}{t}} \cos \frac{2}{t} + C_4 e^{\frac{2}{t}} \sin \frac{2}{t} \neq 0.$$

(Per $C_3 = C_4 = 0$, $t=1$ oppure $t=2$ si ha il classico teorema di LIOUVILLE). Si aggiunge anche un altro teorema analogo.

1. J. LIOUVILLE dimostrò ⁽²⁾ che per ogni terna di numeri razionali interi (a, b, c) , con $a \neq 0$, risulta $ae^2 + be + c \neq 0$, $ae^4 + be^2 + c \neq 0$. Con mezzi altrettanto semplici, e senza ricorrere alle più riposte considerazioni che conducono al teorema di HERMITE, proveremo (scopo modesto delle righe che seguono) il

TEOREMA. — Qualunque sia l'intero razionale non nullo t , e qualunque sia la quintupla di interi razionali non tutti nulli $(C_0, C_1, C_2, C_3, C_4)$ risulta

$$(1) \quad C_0 + C_1 e^{\frac{2}{t}} + C_2 e^{\frac{4}{t}} + C_3 e^{\frac{2}{t}} \cos \frac{2}{t} + C_4 e^{\frac{2}{t}} \sin \frac{2}{t} \neq 0.$$

(2) Ved. « Journal de Mathématiques », t. 5^e (1840), pp. 192-194.

Evidentemente si può supporre t positivo, perchè se ciò non fosse ci si ridurrebbe subito a questo caso moltiplicando l'equazione per $e^{-\frac{4}{t}}$. Essendo $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, la (1), divisa per $\frac{1}{2} e^{\frac{2}{t}}$, si può scrivere

$$2C_1 + 2C_2 e^{\frac{2}{t}} + 2C_3 e^{-\frac{2}{t}} + (C_3 + C_4) e^{\frac{2i}{t}} + i(C_3 - C_4) e^{-\frac{2i}{t}} \neq 0$$

e il teorema sarà dimostrato se proveremo che è

$$(2) \quad \gamma_0 + \gamma_1 e^{\frac{2}{t}} + \gamma_2 e^{-\frac{2}{t}} + \gamma_3 e^{\frac{2i}{t}} + \gamma_4 e^{-\frac{2i}{t}} \neq 0,$$

essendo $\gamma_0 = c_0 + ic_0', \dots, \gamma_4 = c_4 + ic_4'$ interi non tutti nulli (si osservi che almeno due devono essere diversi da zero) del campo $K(i)$ di GAUSS.

2. Posto per $n = 0, 1, 2, \dots$

$$(3) \quad e^z = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{s!}, \quad f_n(z) = \sum_{s=0}^n \frac{z^s}{s!}, \quad \rho_n(z) = \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{z^s}{s!}, \quad e^z = f_n(z) + \rho_n(z),$$

risulta per $n > |z| - 2$

$$\begin{aligned} |\rho_n(z)| &\leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{|z|}{n+2} + \frac{|z|^2}{(n+2)(n+3)} + \dots \right\} \leq \\ &\leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 - \frac{|z|}{n+2} \right)^{-1} \end{aligned}$$

dunque

$$(4) \quad |\rho_n(z)| \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} (1 + o(1)) \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Osserviamo che non possono esistere cinque interi consecutivi $n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, n_0 + 3, n_0 + 4$ pei quali si verifichi simultaneamente

$$\begin{aligned} \gamma_0 + \gamma_1 f_n\left(\frac{2}{t}\right) + \gamma_2 f_n\left(-\frac{2}{t}\right) + \gamma_3 f_n\left(\frac{2i}{t}\right) + \gamma_4 f_n\left(-\frac{2i}{t}\right) &= 0 \\ (n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, n_0 + 3, n_0 + 4) \end{aligned}$$

poichè altrimenti sarebbero verificate le quattro relazioni lineari

$$\begin{aligned} \gamma_1 \frac{1}{n!} \left(\frac{2}{t}\right)^n + \gamma_2 \frac{1}{n!} \left(-\frac{2}{t}\right)^n + \gamma_3 \frac{1}{n!} \left(\frac{2i}{t}\right)^n + \gamma_4 \frac{1}{n!} \left(-\frac{2i}{t}\right)^n &= 0 \\ (n = n_0 + 1, n_0 + 2, n_0 + 3, n_0 + 4) \end{aligned}$$

e ciò è impossibile poichè $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ sono non tutti nulli mentre

il determinante del sistema lineare nelle γ è non nullo, essendo i quattro numeri $\frac{2}{t}$, $-\frac{2}{t}$, $\frac{2i}{t}$, $-\frac{2i}{t}$ tutti distinti.

Sia $n = 2^h + k$, con $0 \leq k \leq 4$ e $h > 4$, intero scelto in guisa che sia

$$(5) \quad \gamma_0 + \gamma_1 f_n\left(\frac{2}{t}\right) + \gamma_2 f_n\left(-\frac{2}{t}\right) + \gamma_3 f_n\left(\frac{2i}{t}\right) + \gamma_4 f_n\left(-\frac{2i}{t}\right) \neq 0,$$

(fissato h l'intero k esiste per l'osservazione precedente) e consideriamo le frazioni

$$(6) \quad 1, \frac{2}{t \cdot 1!}, \frac{2^2}{t^2 \cdot 2!}, \dots, \frac{2^n}{t^n \cdot n!};$$

siccome l'esponente l_n della massima potenza di 2 che divide $n! = (2^h + k)!$ soddisfa alla limitazione

$$(7) \quad l_n = \sum_{s=1}^h \left[\frac{n}{2^s} \right] = \sum_{s=1}^h \left[\frac{2^h + k}{2^s} \right] = 2^{h-1} + 2^{h-2} + \dots + 1 + \\ + \sum_{s=1}^k \left[\frac{k}{2^s} \right] \geq 2^h - 1 = n - k - 1$$

l'ultima delle frazioni (6) si può scrivere a termini interi nel modo seguente

$$\frac{2^n}{t^n \cdot n!} = \frac{2^{k+1}}{M_n} \quad \left(M_n = \frac{t^n \cdot n!}{2^{n-k-1}} \right).$$

Si tratta di vedere ora che tutte le frazioni del sistema (6) si possono scrivere nella forma

$$(6') \quad \frac{L_0}{M_n}, \frac{L_1}{M_n}, \frac{L_2}{M_n}, \dots, \frac{L_n}{M_n}$$

essendo L_r ($r=0, 1, \dots, n$) interi: infatti risulta

$$(8) \quad L_r = \frac{2^r}{t^r \cdot r!} M_n = t^{n-r} \frac{n!}{r!} \frac{1}{2^{n-k-1-r}}$$

e detto l_r l'esponente della massima potenza di 2 che divide l'intero $\frac{n!}{r!}$, in base alla (7) si stabilisce la limitazione

$$l_r = l_n - l_r \geq n - k - 1 - \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{r}{2^s} \right] \geq n - k - 1 - \\ - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{r}{2^s} = n - k - 1 - r,$$

quindi per la (8) L_r è intero.

Ciascuna delle espressioni $f_n\left(\frac{2}{t}\right)$, $f_n\left(-\frac{2}{t}\right)$, $f_n\left(\frac{2i}{t}\right)$, $f_n\left(-\frac{2i}{t}\right)$ (per il fatto che le frazioni (6) si possono scrivere nella forma (6')) moltiplicata per l'intero razionale M_n dà un intero di $K(i)$; anche il primo membro di (5) moltiplicato per M_n risulta intero non nullo di $K(i)$, quindi

$$\left| \gamma_0 + \gamma_1 f_n\left(\frac{2}{t}\right) + \gamma_2 f_n\left(-\frac{2}{t}\right) + \gamma_3 f_n\left(\frac{2i}{t}\right) + \gamma_4 f_n\left(-\frac{2i}{t}\right) \right| \geq \frac{1}{M_n}.$$

Da questa, per le posizioni (3) e la limitazione (4) otteniamo

$$\begin{aligned} & \left| \gamma_0 + \gamma_1 e^{\frac{2}{t}} + \gamma_2 e^{-\frac{2}{t}} + \gamma_3 e^{\frac{2i}{t}} + \gamma_4 e^{-\frac{2i}{t}} \right| \geq \\ & \geq \frac{1}{M_n} - \left| \gamma_1 \rho_n\left(\frac{2}{t}\right) + \gamma_2 \rho_n\left(-\frac{2}{t}\right) + \gamma_3 \rho_n\left(\frac{2i}{t}\right) + \gamma_4 \rho_n\left(-\frac{2i}{t}\right) \right| \\ & \geq \frac{1}{M_n} - (1 + o(1)) (|\gamma_1| + |\gamma_2| + |\gamma_3| + |\gamma_4|) \frac{2^{n+1}}{t^{n+1} \cdot (n+1)!} \end{aligned}$$

e ricordando il valore di M_n e che $k \leq 4$

$$\begin{aligned} & \geq \frac{1}{M_n} \left\{ 1 - (|\gamma_1| + |\gamma_2| + |\gamma_3| + |\gamma_4| + o(1)) \frac{2^6}{t(n+1)} \right\} \\ & = \frac{1}{M_n} \left(1 - O\left(\frac{1}{n}\right) \right) > 0 \text{ per } n \text{ abbastanza grande.} \end{aligned}$$

Dunque la (2) risulta dimostrata.

3. OSSERVAZIONE. — Il ragionamento che precede si adatta con lievi modificazioni a dimostrare, in luogo della (2), la disuguaglianza

$$\gamma_0 + \gamma_1 e^{\frac{1+i}{t}} + \gamma_2 e^{\frac{-1-i}{t}} + \gamma_3 e^{\frac{1-i}{t}} + \gamma_4 e^{\frac{-1+i}{t}} \neq 0;$$

basta sostituire nel ragionamento l'intero $1+i$ di $K(i)$ in luogo dell'intero razionale 2. Ne risulta così dimostrato il teorema analogo al precedente:

TEOREMA. — Qualunque sia l'intero razionale non nullo t e qualunque sia la quintupla di interi razionali non tutti nulli (A, B, C, D, E) risulta

$$\left(A \cos \frac{1}{t} + B \sin \frac{1}{t} \right) e^{\frac{2}{t}} + C e^{\frac{1}{t}} + D \left(\cos \frac{1}{t} + E \sin \frac{1}{t} \right) \neq 0.$$