Bollettino Unione Matematica Italiana

Ugo Broggi

Su qualche trasformazione di serie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.2, p. 84–89.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_2_84_0>

Su qualche trasformazione di serie.

Nota di U. BROGGI (a Milano).

Sunto. - *L'A. si vale dell'identità* $a_n = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} \Delta^h a_0$ *per sommare la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{h=0}^{n} F_s(h) x^{n-h} \right) \frac{t^n}{n!}$ *dove* $p(n) = \Delta^n F_0(n)$, $F_{s-1}(n) = \Delta^n F_s(n)$ *e* $p(x)$ *è un polinomio in* x.

Si vale dell'identità ricordata e dell'altra $a_n = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} u^{n-h} T^h a_0$, *dove* $T^0 a_n = a_n$. $T^h a_{n+1} - u T^h a_n = T^{h+1} a_n$, *per formare la trasformata di Eulero e la trasformata di Eulero di ordine* $u \geq 0$ *di una serie di termini costanti, della prima delle due identità per trasformare una serie di potenze in serie di Newton. Estende ad* u *positivo qualunque una dimostrazione, data da* K. KNOPP *per* $u = 1$, *del teorema che la trasformata di Eulero di ordine* u *di una serie convergente, converge con ugual somma.*

L'osservazione che se a_n è un elemento della successione a_0, $a_1, \ldots$, è anche, come è ben noto

$$a_n = a_0 + \binom{n}{1} \Delta a_0 + \ldots + \Delta^n a_0 \tag{1}$$

permette di sommare, se $p(x)$ è un polinomio di grado m in x e sia $a_n = p(n)$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) \frac{t^n}{n!} = e^t \sum_{r=0}^{m} \Delta^r p(0) \frac{t^r}{r!}$$

(poichè $\Delta^{m+1}p(0)=\Delta^{m+2}p(0)=\ldots=0$), e, se

$$p(n)=\Delta^n F_0(n),\quad F_{s-1}=\Delta^n F_s(n)\qquad (s=1,2,\ldots)$$

l'altra

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[F_s(0)x^n+\binom{n}{1}F_s(1)x^{n-1}+\ldots+F_s(n)\right]\frac{t^n}{n!}=e^{(s+1)xt}\sum_{r=0}^{m}\Delta^r p(0)\frac{t^r}{r!}.$$

Ed essa trasforma formalmente la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n b_n t^n$$

nella serie doppia

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi^{(n)}(t)t^n$$

dove $\varphi(t)=b_0+b_1t+\ldots$, studiata dal PINCHERLE, e di cui A. MAMBRIANI dava qualche esempio in una nota recente ([1]). La relazione

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{t^n}{n!}=e^t\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^n a_0\frac{t^n}{n!}$$

ne è un caso particolare, corrispondente a $b_n=\dfrac{1}{n!}$. Ove poi sia

$$T^0a_n=a_n,\quad Ta_n=a_{n+1}-ua_n$$
$$T^h a_{n+1}-uT^h a_n=T^{h+1}a_n\qquad (h=1,2,\ldots)$$

e pertanto, come si vede per induzione

$$T^n a_r=a_{n+r}-\binom{n}{1}ua_{n+r-1}+\ldots+(-1)^n u^n a_r$$

si ottiene

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{t^n}{n!}=e^{ut}\sum_{n=0}^{\infty}T^n a_0\frac{t^n}{n!}$$

$$a_n=a_0u^n+\binom{n}{1}u^{n-1}Ta_0+\binom{n}{2}u^{n-2}T^2a_0+\ldots+T^n a_0.\tag{2}$$

Basta infatti chè la (2), la quale evidentemente sussiste per $n=0$, 1, valga fino ad $n-1$, perchè essa valga parimenti per n, poichè se

$$a_{n-1}=a_0u^{n-1}+\binom{n-1}{1}u^{n-2}Ta_0+\ldots+T^{n-1}a_0$$

([1]) « Boll. Un. Mat. It. », Dicembre 1933, pp. 296-302.

è anche

$$Ta_{n-1} = u^{n-1}Ta_0 + \binom{n-1}{1}u^{n-2}T^2a_0 + \dots + T^na_0$$

e pertanto

$$a_n = ua_{n-1} + Ta_{n-1} = a_0u^n + \binom{n}{1}u^{n-1}Ta_0 + \binom{n}{1}u^{n-2}T^2a_0 + \dots + T^na_0.$$

Interessa a noi di considerare le due trasformazioni di $b_0 + b_1t + \dots$ a mezzo della (1) e della (2), corrispondenti ad $a_n = b_n$, e la trasformazione di $b_0 + b_1t + \dots$ a mezzo della (1) corrispondente ad $a_n = t^n$. Le due prime portano alla trasformata di Eulero ed alla trasformata (generalizzata) di ordine u di Eulero di una serie di termini costanti, la terza conduce alla trasformazione formale di una serie di potenze in serie di coefficenti binomiali. La soluzione del problema inverso, la trasformazione di una serie di coefficenti binomiali in serie di potenze, già data da S. PINCHERLE (1), consente di determinare i coefficienti dello sviluppo in serie di una funzione intera, che in corrispondenza dei valori interi non negativi della sua variabile assume valori assegnati.

1. La (1) trasforma, se $a_n = b_n$, la serie $b_0 + b_1t + \dots$ nell'altra

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n b_0 \frac{1}{(1-t)^{n+1}}$$

e se $t = -1$, la serie $b_0 - b_1 + b_2 - \dots$, di termini di segno qualunque, nella sua trasformata di Eulero

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \Delta^n b_0,$$

che, come veniva dimostrato da L. D. AMES (2), e ripetutamente dopo di lui, converge ed ha la somma di $b_0 - b_1 + \dots$, se questa converge.

La (2) dà invece, se $a_n = b_n$, la trasformazione formale della serie $b_0 + b_1t \dots$ nell'altra

$$b_0\sum_{n=0}^{\infty} u^nt^n + Tb_0\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{1}u^nt^{n+1} + T^2b_0\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}u^nt^{n+2} + \dots$$

Le serie, che rispettivamente moltiplicano b_0, Tb_0, $T^2b_0, \dots$, e

(1) « Rend. Circolo Mat. di Palermo », t. XIV (1900).

(2) « Annals of Mathematics », vol. 21, 3 (1901).

che possono non convergere, costituiscono gli sviluppi di $\frac{1}{1-ut}$, $\frac{1}{1!}\frac{d}{du}\frac{1}{1-ut}$, $\frac{1}{2!}\frac{d^2}{du^2}\frac{1}{1-ut}$,....

All'espressione ottenuta può venir data la forma più generalmente valida

$$b_0\frac{1}{1-ut}+\frac{Tb_0}{1!}\frac{d}{du}\frac{1}{1-ut}+\frac{T^2b_0}{2!}\frac{d^2}{du^2}\frac{1}{1-ut}+\dots=$$
$$=\frac{b_0}{1-ut}+\frac{tTb_0}{(1-ut)^2}+\frac{t^2T^2b_0}{(1-ut)^3}$$

e se $t=-1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+u)^{n+1}}T^nb_0.$$

È questa, se $u\geq 0$, la trasformata di Eulero di ordine u, alla quale si perviene se $u=2^p-1$ $(p=1, 2,...)$ iterando 1, 2,... volte la trasformazione di Eulero.

Che la trasformata di ordine $u\geq 0$ di una serie convergente converga, con ugual somma, può venire dedotto, come ha fatto K. Knopp nel caso $u=1$ [1], dal teorema di Markoff secondo il quale se convergono le serie

$$c^{(0)}+c^{(1)}+c^{(2)}+\dots,$$
$$c^{(k)}=\alpha_0^{(k)}+\alpha_1^{(k)}+\dots, \qquad (k=0, 1, 2,...)$$
$$s^{(n)}=\alpha_n^{(0)}+\alpha_n^{(1)}+\dots, \qquad (n=0, 1, 2,...)$$
$$R_m=r_m^{(0)}+r_m^{(1)}+\dots,$$

dove

$$r_m^{(k)}=\alpha_m^{(k)}+\alpha_{m+1}^{(k)}+\dots,$$

e se R_m tende a zero col crescere di m, è

$$\sum_{n=0}^{\infty}s^{(n)}=\sum_{k=0}^{\infty}c^{(k)} \text{ [2]}.$$

Poichè, per ipotesi, la serie $b_0-b_1+b_2-\dots$ converge, le b_n e con esse, qualunque sia l'intero positivo k, le

$$\frac{T^nb_k}{(1+u)^{n+1}}$$

costituiscono successioni nulle.

[1] *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, (1922), p. 238.
[2] K. Knopp, loc. cit., p. 236.

Ove si ponga

$$\alpha_n^{(k)} = (-1)^k \left[\frac{T^n b_k}{(1+u)^n} - \frac{T^{n+1} b_k}{(1+u)^{n+1}}\right]$$

è dunque

$$s^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n^{(k)} = \frac{T^n b_0}{(1+u)^{n+1}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(k)} = (-1)^k b_k$$

$$r_m^{(k)} = (-1)^k \frac{T^m b_k}{(1+u)^{m+1}}$$

così come

$$R_m = \frac{1}{(1+u)^{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k T^m b_k =$$

$$= \frac{1}{(1+u)^{m+1}} \left[r_m + \binom{m}{1} u r_{m-1} + \dots + u^m r_0\right]$$

se

$$r_m = (-1)^m (b_m - b_{m+1} + \dots).$$

Poichè le r_m costituiscono una successione nulla e

$$\frac{1}{(1+u)^m} \binom{m}{\mu} u^\mu \to 0, \quad \text{se} \quad m \to \infty,$$

$$\frac{1}{(1+u)^m} \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} u^\mu = 1,$$

$$R_m \to 0, \quad \text{se} \quad m \to \infty,$$

è, per il teorema di MARKOFF

$$b_0 - b_1 + b_2 - \dots = \frac{b_0}{1+u} - \frac{Tb_0}{(1+u)^2} + \frac{T^2 b_0}{(1+u)^3} - \dots$$

come si era affermato.

2. La (1) trasforma, se $a_n = t^n$, la serie $b_1 t + b_2 t^2 + \dots$ nella serie di NEWTON

$$\binom{t}{1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \binom{t}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \Delta^2 0^n b_n + \binom{t}{3} \sum_{n=3}^{\infty} \Delta^3 0^n b_n + \dots$$

$$= \binom{t}{1} f(1) + \binom{t}{2} [f(2) - 2f(1)] + \binom{t}{3} \left[f(3) - \binom{3}{1} f(2) + \binom{3}{2} f(1)\right]$$

$$\dots + \binom{t}{n} \left[f(n) - \binom{n}{1} f(n-1) + \binom{n}{2} f(n-2) + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} f(1)\right]$$

$$= \binom{t}{1} \Delta f(0) + \binom{t}{2} \Delta^2 f(0) + \binom{t}{3} \Delta^3 f(0) + \dots$$

se la serie $b_1 t + b_2 t^2 + \dots$ ha un raggio di convergenza infinito, ed è

$$f(t) = b_1 t + b_2 t^2 + \dots$$

La serie di NEWTON

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{t}{n} \Delta^n f(0)$$

converge nel semipiano

$$R(t) = 1 + \limsup_{n \to \infty} \frac{ln\,|\Delta^n f(0)|}{\log n} \text{ (1)}$$

e vi definisce una funzione regolare in esso, e che in generale non coincide con $f(t)$ se non nei punti 0, 1, 2,....

(1) Cfr. NÖRLUND, *Leçon sur les series d'interpolation*, p. 115.