BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FILIPPO SIBIRANI

Sull'interpolazione della curva logistica generalizzata

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 13 (1934), n.2, p. 81–84.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_2_81_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_2_81_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1934.

PICCOLE NOTE

Sull'interpolazione della curva logistica generalizzata.

Nota di F. SIBIRANI (a Bologna).

Santo. - Si indica il modo più rapido per la determinazione dei parametri nell'interpolazione della funzione $y = k[1 + e^{F(x)}]^{-1}$ ove $F(x)$ è una funzione razionale intera di grado n .

R. PEARL in « Studies in human Biology » (1) volendo determinare la funzione del tipo

$$(1) \quad y = \frac{k}{1 + e^{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3}}$$

la quale per 5 valori di x in progressione aritmetica prende 5 prestabiliti valori, dice che dopo molto lunghi procedimenti si perviene all'equazione

$$(2) \quad y_1^4 y_3^4 (k - y_0)(k - y_2)^6 (k - y_4) = y_0 y_2^6 y_4 (k - y_1)^4 (k - y_3)^4.$$

Ora vogliamo mostrare come invece con grande semplicità si stabilisca la equazione analoga alla (2) qualunque sia il grado della funzione razionale intera ad esponente di e nel secondo membro della (1).

Si voglia dunque determinare la funzione del tipo

$$(3) \quad y = \frac{k}{1 + e^{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}}$$

la quale per gli $n + 2$ valori di x , in progressione aritmetica, $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ prenda i valori $y_0, y_1, \dots, y_{n+1}$.

Le $n + 2$ equazioni a cui debbono soddisfare gli $n + 2$ parametri $k, a_0, a_1, \dots, a_{n+1}$ sono

$$(4) \quad a_0 + a_1x_h + a_2x_h^2 + \dots + a_nx_h^n = \log \frac{k - y_h}{y_h}$$

($h = 0, 1, 2, \dots, n + 1$).

(1) Baltimore, Williams-Wilkins Company, 1924; Cap. XXIV.

Se è $x_h = x + h\beta$, col cambiamento di variabile $x = x + u\beta$ le equazioni (2) divengono

$$(5) \quad b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + \dots + b_n h^n = \log \frac{k - y_h}{y_h}$$

$$(h = 0, 1, 2, \dots, n + 1).$$

Alla prima equazione sommiamo la seconda moltiplicata per λ_1 , la terza moltiplicata per λ_2 , l'ultima moltiplicata per λ_{n+1} ; otteniamo

$$b_0 \left(1 + \sum_1^{n+1} \lambda_h \right) + b_1 \sum_1^{n+1} h \lambda_h + b_2 \sum_1^{n+1} h^2 \lambda_h + \dots + b_n \sum_1^{n+1} h^n \lambda_h =$$

$$= \log \frac{k - y_0}{y_0} + \sum_1^{n+1} \lambda_h \log \frac{k - y_h}{y_h}.$$

Se si determinano le λ_h in modo che sia

$$\sum_1^{n+1} \lambda_h = -1, \quad \sum_1^{n+1} h \lambda_h = 0, \quad \sum_1^{n+1} h^2 \lambda_h = 0, \dots, \sum_1^{n+1} h^n \lambda_h = 0$$

è

$$(6) \quad \log \frac{k - y_0}{y_0} + \sum_1^{n+1} \lambda_h \log \frac{k - y_h}{y_h} = 0$$

il risultato dell'eliminazione di $b_0, b_1, \dots, b_n$ fra le (5).

Dagli elementi del Calcolo delle differenze si sa che è $\Delta^p O^q = 0$ per $p > q$, onde

$$(n+1)^q - \binom{n+1}{1} n^q + \binom{n+1}{2} (n-1)^q - \binom{n+1}{3} (n-2)^q + \dots +$$

$$+ (-1)^n \binom{n+1}{n} 1^q = 0$$

per $q = 1, 2, \dots, n$. Se poi si osserva che è

$$-\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} - \binom{n+1}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n+1}{n} = -1,$$

si trae subito

$$\lambda_h = (-1)^h \binom{n+1}{h} \quad (h = 1, 2, \dots, n + 1).$$

L'equazione (6) è dunque

$$\sum_0^{n+1} (-1)^h \binom{n+1}{h} \log \frac{k - y_h}{y_h} = 0,$$

od anche, se $n = 2p$

$$(6') \quad \frac{k - y_0}{y_0} \left(\frac{k - y_2}{y_2} \right)^{\binom{2p+1}{2}} \left(\frac{k - y_4}{y_4} \right)^{\binom{2p+1}{4}} \dots \left(\frac{k - y_{2p}}{y_{2p}} \right)^{\binom{2p+1}{2p}} = \\ = \left(\frac{k - y_1}{y_1} \right)^{\binom{2p+1}{1}} \left(\frac{k - y_3}{y_3} \right)^{\binom{2p+1}{3}} \left(\frac{k - y_5}{y_5} \right)^{\binom{2p+1}{5}} \dots \left(\frac{k - y_{2p+1}}{y_{2p+1}} \right)^{\binom{2p+1}{2p+1}}$$

e se $n = 2p + 1$

$$(6'') \quad \frac{k - y_0}{y_0} \left(\frac{k - y_2}{y_2} \right)^{\binom{2p}{2}} \left(\frac{k - y_4}{y_4} \right)^{\binom{2p}{4}} \dots \left(\frac{k - y_{2p}}{y_{2p}} \right)^{\binom{2p}{2p}} = \\ = \left(\frac{k - y_1}{y_1} \right)^{\binom{2p}{1}} \left(\frac{k - y_3}{y_3} \right)^{\binom{2p}{3}} \dots \left(\frac{k - y_{2p-1}}{y_{2p-1}} \right)^{\binom{2p}{2p-1}}$$

Il grado dell'equazione è $\binom{n+1}{\frac{n+1}{2}}$ se n è dispari, $\binom{n+1}{\frac{n}{2}}$ se

n è pari; ma si abbassa subito di un'unità perchè $k = 0$ è radice, che deve però essere scartata.

Se k_1 è una soluzione della (6') o (6''), dalle prime $n + 1$ equazioni (5) si potrebbero determinare $b_0, b_1, \dots, b_n$. Ma si può procedere più semplicemente così. Fatte le successive differenze degli $n + 2$ numeri

$$\log \frac{k_1 - y_h}{y_h} \quad (h = 0, 1, 2, \dots, n + 1)$$

è ben noto che la funzione razionale intera in u di grado non superiore ad n

$$\log \frac{k_1 - y_0}{y_0} + u \Delta \log \frac{k_1 - y_0}{y_0} + \frac{u(u-1)}{2} \Delta^2 \log \frac{k_1 - y_0}{y_0} + \\ + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!} \Delta^3 \log \frac{k_1 - y_0}{y_0} + \dots + \\ + \frac{u(u-1)(u-2) \dots (u-n+1)}{n!} \Delta^n \log \frac{k_1 - y_0}{y_0}$$

soddisfa alle prime $n + 1$ condizioni (5), onde il coefficiente di u^n è b_n ; se ora in quest'ultimo polinomio si pone $u = \frac{x - x_0}{\beta}$, il coefficiente di x^n è a_n . Sono così determinate le soluzioni delle (4) e quindi la funzione cercata.

Notiamo che le equazioni (6') o (6'') possono ammettere più di una radice reale oltre la soluzione $k = 0$. Basta l'esempio seguente. Sia $n = 4$ e di più sia $0 < y_0 < y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < y_5$. L'equazione (6') è qui

$$\frac{k - y_0}{y_0} \left(\frac{k - y_2}{y_2} \right)^{10} \left(\frac{k - y_4}{y_4} \right)^5 - \left(\frac{k - y_1}{y_1} \right)^5 \left(\frac{k - y_3}{y_3} \right)^{10} \left(\frac{k - y_5}{y_5} \right) = 0.$$

Dicendo $\varphi(k)$ il primo membro, è facile vedere che

$\varphi(y_0) < 0$, $\varphi(y_1) < 0$, $\varphi(y_2) > 0$, $\varphi(y_3) < 0$, $\varphi(y_4) > 0$, $\varphi(y_5) > 0$
 e quindi almeno tre radici positive esistono, una compresa fra y_1 e y_2 , una compresa fra y_2 e y_3 ed una fra y_3 ed y_4 .