UMI

Corrispondenza

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.2, p. 131–133.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_2_131_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1934.

CORRISPONDENZA

RISPOSTE

64. Nel « Bollettino » del 15 ottobre 1933 si richiamò l'attenzione sulla seguente domanda proposta dal prof. ST. GOLAB, di Cracovia, al « Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung »:

« È $f(x)$ una funzione periodica di periodo π della variabile « reale x; essa è sempre positiva ed ammette dovunque la deri- « vata seconda $f''(x)$ continua. Si chiede di riconoscere se sussista « la disuguaglianza

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \frac{f''(x)}{f(x)}}\, dx \leq \pi \text{ ».} \tag{1}$$

Orbene, si può asserire che nelle ipotesi poste, la disuguaglianza in generale non vale.

Si consideri infatti la funzione $f(x)$ così definita: per x variabile negli intervalli serrati [1]

$$s_h \equiv \left(\frac{3h-1}{3}\pi,\ \frac{3h+1}{3}\pi\right) \qquad (h = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

$f(x)$ coincide con la funzione $\sec^2 x$, mentre che, nei rimanenti intervalli

$$p_h \equiv \left(\frac{3h+1}{3}\pi,\ \frac{3h+2}{3}\pi\right) \qquad (h = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

coincide rispettivamente con le funzioni

$$P_h(x) = a\left(x - \frac{2h+1}{2}\pi\right)^4 + b\left(x - \frac{2h+1}{2}\pi\right)^2 + c$$

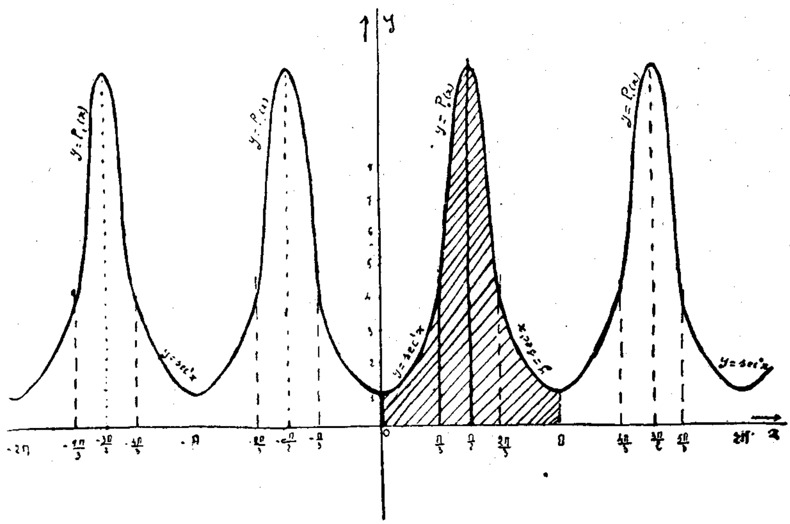
in cui $\left(\text{ove si rappresenti con } k \text{ la quantità } \frac{\pi}{6}\right)$ si è posto

$$a = \frac{10k + \sqrt{3}}{k^3}, \quad b = \frac{-20k - 6\sqrt{3}}{k}, \quad c = 10k^2 + 5\sqrt{3}\,k + 4.$$

Risulta ovviamente $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$.

(1) *Serrati* nel senso di SEVERI, *chiusi* nel senso di CANTOR.

Tali valori di a, b, c, sono stati determinati in modo che le parabole del quarto ordine $y = P_h(x)$ abbiano, negli estremi dei corrispondenti intervalli p_h, contatti tripunti con la linea $y = \sec^2 x$,



$y = f(x)$

o ciò che equivale, che in tali punti i valori che assumono $P_h(x)$, $P_h'(x)$ e $P_h''(x)$ coincidano ordinatamente coi valori ivi assunti dalla funzione $\sec^2 x$, dalla sua derivata prima, $\dfrac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$, e dalla derivata seconda, $2\dfrac{3 - 2\cos^2 x}{\cos^4 x}$ (1).

(1) Per il che (tenuto conto — anche per ciò che diremo in seguito — che è

$$P_h\left(\frac{3h+1}{3}\pi\right) = P_h\left(\frac{3h+2}{3}\right) = P_0\left(\frac{\pi}{3}\right) = ak^4 + bk^2 + c$$

e

$$\sec^2 \frac{3h+1}{3}\pi = \sec^2 \frac{3h+2}{3}\pi = 4,$$

$$P_h'\left(\frac{3h+1}{3}\pi\right) = P_0'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4ak^3 - 2bk \quad \text{e} \quad \frac{2 \operatorname{sen} \frac{3h+1}{3}\pi}{\cos^3 \frac{3h+1}{3}\pi} = 8\sqrt{3}$$

$$P_h'\left(\frac{3h+2}{3}\pi\right) = P_0'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4ak^3 + 2bk \quad \text{e} \quad \frac{2 \operatorname{sen} \frac{3h+2}{3}\pi}{\cos^3 \frac{3h+2}{3}\pi} = -8\sqrt{3}$$

Ora, negli intervalli in cui vanno considerate, le funzioni $\sec^2 x$ e $P_h(x)$ sono positive, continue, assieme alle loro derivate seconde, ed essendo $P_{h+1}(x+\pi) = P_h(x)$, ne consegue ([1]) che la $f(x)$, anzi definita, è una funzione periodica, di periodo π, sempre positiva ed ammette ovunque la derivata seconda, $f''(x)$, continua.

Ciò detto, siccome $f(x)$, e quindi anche $f''(x)$ e $\sqrt{1+\frac{f''(x)}{f(x)}}$, sono funzioni simmetriche ([1]) rispetto alla retta $x=\frac{\pi}{2}$, e, dato che la funzione integranda è, nell'intervallo $0 \,|\!\!-\!\!|\, \pi$, reale e positiva ([1]), avremo — ove si denoti con I l'integrale (1) —

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\frac{f''(x)}{f(x)}}\, dx > 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+\frac{f''(x)}{f(x)}}\, dx.$$

Ma nell'intervallo $0 \,|\!\!-\!\!|\, \frac{\pi}{3}$, ove va considerato l'ultimo integrale, è $f(x) \equiv \sec^2 x$ e quindi $\sqrt{1+\frac{f''(x)}{f(x)}} = \sqrt{3(1+2\,\mathrm{tg}^2 x)} > \sqrt{3}$.

Si avrà quindi facilmente

$$I > 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+\frac{f''(x)}{f(x)}}\, dx > 2\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3} > \pi.$$

Cioè, assumendo per $f(x)$ la funzione da noi introdotta, l'integrale proposto risulta maggiore di π.

GIULIO PLATONE

$$P_h''\left(\frac{3h+1}{3}\pi\right) = P_h''\left(\frac{3h+2}{3}\pi\right) = P_h''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12k^2 + 2b$$

$$2\,\frac{3-2\cos^2\frac{3h+1}{3}\pi}{\cos^4\frac{3h+1}{3}\pi} = 2\,\frac{3-2\cos^2\frac{3h+2}{3}\pi}{\cos^4\frac{3h+2}{3}\pi} = 80)$$

occorre e basta che a, b, c soddisfino simultaneamente le condizioni

$$\begin{aligned} ak^4 + bk^2 + c &= 4 \\ 2ak^3 + bk &= -4\sqrt{3} \\ 6ak^2 + b &= 40 \end{aligned} \qquad k = \frac{\pi}{6}.$$

([1]) Il che si verifica facilmente.