BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Recensioni

- * D. Hilbert: *Gesammelte Abhandlungen. Erster Band. Zahlentheorie Zweiter Band. Algebra, Invariantentheorie, Geometrie* (B. Levi)
- * T. Bonnesen-W. Fenchel: *Theorie der konvexen Körper* (Beniamino Segre)
- * G. A. Bliss: *Algebraic functions* (Beniamino Segre)
- * T. Radó: *On the problem of Plateau* (Beniamino Segre)
- * C. Kuratowski: *Topologie I. Espaces métrisables, espaces Complets*
- * J. Favard: *Leçons sur les fonctions presque-périodiques* (Tullio Viola)
- * Edmond Bauer: *Introduction à la théorie des groupes et à ses applications à la Physique Quantique* (B. Levi)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 13 (1934), n.2, p. 119–130.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_2_119_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RECENSIONI

D. HILBERT: *Gesammelte Abhandlungen*. Erster Band. *Zahlentheorie*
Zweiter Band. *Algebra, Invariantentheorie, Geometrie*. Berlin,
Springer, 1932-33; pag. XIV+539 e VIII+453.

Del programma di edizione di questa raccolta delle memorie di DAVID HILBERT fu già data breve notizia in questo « Bollettino » (XI, p. 181) al momento della pubblicazione del 1° volume.

Il vasto campo di ricerca abbracciato dalla mente poderosa dell'Autore è distribuito, sia nella divisione in volumi, sia (almeno in parte) entro ciascun volume, secondo l'affinità degli argomenti: in sott'ordine per la data di pubblicazione. Criterio indubbiamente utilissimo per chi cerchi nell'opera dell'HILBERT tale o tal altro risultato di cui l'A. ha arricchito la scienza dell'ultimo cinquantennio: ma meno suggestivo a parer nostro di uno più prossimo al cronologico.

Si può dire di tutta l'opera dell'HILBERT ciò che HELMUT HASSE afferma per i lavori sui corpi algebrici (Bd. I, pag. 528): che cioè essa riassume metodi e problemi del secolo XIX ed indica la via per quelli del secolo XX: l'A. medesimo si è riconosciuto questo compito, con la celebre comunicazione al Congresso di Parigi del 1900: questa non trova ancor luogo in questi volumi; vi troviamo invece (Bd. II) la più recente memoria (1927) intitolata « Sull'equazione di nono grado » che richiama l'attenzione sopra qualcuna delle questioni proposte in quell'occasione e tuttora irrisolte e dà una interessante risposta per un problema particolare dal quale viene il titolo.

La produzione matematica dell'HILBERT incomincia con ricerche sulla teoria invariante delle forme binarie secondo i classici metodi di ARONHOLD e della rappresentazione simbolica (Bd. II, mem. 1 a 4 (1885-87)). Tali metodi egli abbandona negli anni successivi, per inaugurare (1888-1893) le fondamentali concezioni algebrico-aritmetiche che lo conducono a inserire il problema del sistema completo degli invarianti per un sistema di forme algebriche in un

numero qualunque di variabili in quello più generale dei sistemi di forme algebriche: la teoria dei moduli di forme da lui così luminosamente fondata ha avuto nel seguito riflessi ed applicazioni essenziali in molte ricerche matematiche, a cominciare dalla geometria algebrica e dalla teoria dei numeri, fino a quella delle equazioni differenziali. Indicazioni e bibliografia su questi ulteriori sviluppi, per quanto riguarda il campo algebrico e particolarmente la matematica tedesca sono forniti da una nota di VAN DER WAERDEN a pag. 401-403 del citato Bd. II.

Dopo queste ricerche algebriche l'attenzione dell'HILBERT si volge alla teoria dei corpi algebrici: le memorie sopra questo argomento, che appartengono tutte al periodo fra il 1894 e il '99, costituiscono quasi per intero il vol. I: in particolare più di metà di questo volume contiene il celebre trattato *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper* pubblicato la prima volta nel *Jahresbericht d. d. Math.-Vereinigung* del 1894. Una nota di H. HASSE alla fine del detto Bd. I informa il lettore sopra l'importanza di queste ricerche dell'HILBERT come conclusione del movimento di idee incominciato con KUMMER e come punto dal quale ha preso le mosse una schiera di giovani matematici particolarmente tedeschi. Alla teoria dei numeri si può pure attribuire una elegante dimostrazione (1896) di una nota proposizione di WEIERSTRASS e DEDEKIND sopra i corpi a n unità che, per la sua dipendenza dalla teoria delle forme algebriche, si trova nel 2.^o vol. Ricordiamo ancora, nel 1.^o vol., la bella Memoria del 1909 nella quale il celebre problema di WARING, che negli anni precedenti aveva affaticato la mente di vari matematici per essere trattato separatamente per gli esponenti da 1 a 10, è risolto d'un tratto per un esponente qualunque: da notare una semplificazione della presente edizione, in cui l'integrale fondamentale su cui si fonda la dimostrazione, che era d'ordine 25, è ridotto ad uno 5-plo. Il celebre *Festschrift* sui *Fondamenti della Geometria* (1899) non trova posto nella presente raccolta, e nemmeno le memorie (una eccettuata) che gli hanno servito di complemento e che nelle successive edizioni del *Festschrift* sono già state ristampate in appendice. Lo sostituisce un riassunto delle principali vedute che esso contiene ad opera di A. SCHMIDT, in cui sono pure indicati gli ulteriori sviluppi che esse hanno avuto per opera di scolari dell'HILBERT. Riprodotta è delle nominate memorie, quella sulle superficie a curvatura costante, che, insieme con una sulla forma delle superficie del 4.^o ordine e una sui rami reali di una curva algebrica portano interessanti contributi di carattere topologico. Completano il vol. II alcune memorie che si staccano della dire-

zione principale delle ricerche dell'A., documentando in campi diversi della originalità e fecondità del suo ingegno: sopra l'analisi indeterminata, sulla rappresentazione delle forme definite, sui polinomi a coefficienti interi: notevole in alcune di esse l'applicazione a questioni aritmetiche dei concetti della geometria algebrica.

B. LEVI

T. BONNESEN-W. FENCHEL: *Theorie der konvexen Körper* (« Ergebnisse der Mathematik », III Bd., 1), Berlin, Springer, 1934, pp. VII+164.

La teoria dei corpi convessi, sorta verso la fine del secolo scorso coi lavori fondamentali di BRUNN e di MINKOWSKI, si è rapidamente sviluppata in un tutto organico, di cui mancava finora una esposizione sistematica; tale lacuna vien colmata da questo volume, che, senza essere un vero e proprio Trattato, costituisce una guida preziosissima sull'argomento. La teoria è in vari punti elaborata personalmente, ed esposta senz'altro nel caso degli spazi ad n dimensioni, sotto forma attraente e spesso suggestiva, con sobrie dimostrazioni dei fatti salienti ed opportuni rinvii; si può aggiungere che gli AA. hanno fatto miracoli, nel condensare in breve spazio risultati tanto numerosi e svariati.

Premessi (§ 1) i concetti fondamentali sugli *insiemi convessi* (piani d'appoggio, involucri convessi, ecc.), nei §§ 2 e 3 trovansi varie proprietà relative ai *baricentri*, ai *punti al contorno* ed ai *piani d'appoggio* dei corpi convessi. Si passa quindi (§ 4) allo studio delle *funzioni convesse*, ed alla *rappresentazione analitica* dei corpi convessi mediante funzioni di distanza e funzioni d'appoggio, da cui (§ 5) vengon tratte le nozioni essenziali concernenti le *combinazioni lineari* di corpi convessi, e lo loro *schiere lineari e concave*. Seguono (§ 6) vari teoremi sull'*approssimazione dei corpi convessi* mediante poliedri o corpi convessi analitici, dedotti da un generale « principio di scelta » dovuto al BLASCHKE.

Si entra poscia nella parte più sostanziosa del libro, colla considerazione (§ 7) dei *volumi ordinario e misti* di uno o più corpi convessi, e di vari altri enti geometrici e numerici inerenti ad un corpo convesso, come p. es. il relativo *corpo delle proiezioni*, la *superficie esterna*, la *larghezza*, lo *spessore*, ecc.; vi sono inoltre (§ 8) le *formule* che permettono di calcolare volumi ed aree, con cenni di applicazioni alla teoria delle *probabilità geometriche*, e (§ 9) i diversi processi di *simmetrizzazione* e di *arrotondamento*, dovuti a STEINER, SCHWARZ ed altri. Seguono (nei §§ 10, 11, 12) — in un colle molteplici loro applicazioni — le celebri *disuguaglianze* di

MINKOWSKI e varie analoghe limitazioni, involgenti due o più delle caratteristiche numeriche di un corpo convesso e relative a determinati *problemi estremali* (fra cui sono classici quelli isoperimetrici); nonchè il *teorema di BRUNN-MINKOWSKI*, concernente la concavità della radice n -ma del volume di un corpo convesso variabile in una schiera lineare o concava di S_n , considerata come funzione del parametro da cui il corpo dipende.

Il § 13 tratta delle importanti questioni connesse colla *determinazione di corpi convessi mediante funzioni di curvatura*, assegnando in proposito vari teoremi di unicità e di esistenza. I tre §§ successivi espongono numerosi ed eleganti risultati sui *corpi convessi a centro*, sui *corpi di larghezza costante* (orbiformi, sferoformi, ecc.) e sugli *ellissoidi* (in particolare su cerchi e sfere). L'ultimo § si occupa sommariamente delle *proprietà di curvatura* dei corpi convessi (vertici di ovali, ecc.), e della *rigidità* o *piegabilità* della superficie totale o di una parte del contorno di un corpo convesso di S_3 .

Alla fine del volume trovasi una *Bibliografia* ricchissima ed accurata, comprendente poco meno di 200 Autori.

BENIAMINO SEGRE

G. A. BLISS: *Algebraic functions* (« Colloquium Publications », vol. XVI), New York 1933, pp. IX+218.

Questo volume dei « Colloquium » — dedicato allo studio delle funzioni algebriche e dei loro integrali — pur avendo solo, data la sua relativamente piccola mole, carattere introduttorio, conduce con rapidità ed eleganza al centro della teoria; ed è consigliabile a quanti per la prima volta vogliono a quella accostarsi, anche per le sue eccellenti qualità didattiche. Ciascuno dei 10 Capitoli di cui esso consta, contiene brevi rinvii alla *Bibliografia* che chiude il volume, i quali sono più che sufficienti per chi desideri approfondire argomenti singoli.

Premessi (Cap. I) alcuni richiami concernenti risultati elementari sulle funzioni analitiche, sui risultanti, ecc., i Cap. II e III trattano sotto forma chiara e concisa degli *sviluppi di PUISEUX* (a proposito dei quali, però, il nome di questi non è fatto) e delle *funzioni razionali su di una curva algebrica*, le quali sono studiate coi metodi della teoria aritmetica delle funzioni algebriche, pervenendo rapidamente — senza che prima occorra sciogliere le singolarità — alla *costruzione degli integrandi delle tre specie* ed al *teorema di RIEMANN-ROCH*.

I Cap. IV, V e VI sono rispettivamente dedicati alle *superficie di RIEMANN, agli integrali abeliani ed al teorema di ABEL*; i Cap. VII ed VIII si occupano delle *trasformazioni birazionali*, e dello *scioglimento delle singolarità* a mezzo di trasformazioni cremoniane e mediante trasformazioni birazionali fra curve. Relativamente al secondo caso l'A. distingue due teoremi, secondoche la curva piana si pensa immersa nel piano della geometria proiettiva o nel così detto piano della teoria delle funzioni; rileviamo che quest'ultimo « piano » ha l'ordine invariante relativo uguale a 2, onde il secondo di quei teoremi esprime la possibilità di trasformare birazionalmente ogni curva algebrica in una *curva con soli nodi, situata su di una quadrica dello spazio ordinario*. Da qui, come corollario immediato (effettuando una proiezione su di un piano da un generico punto dello spazio), si potrebbe dedurre il primo dei suddetti teoremi, dall'A. stabilito invece in modo autonomo.

Il Cap. IX tratta del *problema dell'inversione*, limitandosi alle curve di genere 0 ed 1, con cenni sulla teoria delle *funzioni ellittiche*. Infine il Cap. X espone vari *esempi* interessanti, relativi a curve ellittiche, iperellittiche, trigonali, ecc..

BENIAMINO SEGRE

T. RADÓ: *On the problem of Plateau*. « *Ergebnisse der Mathematik*, II Bd., 2 »; Berlin, Springer, 1933, p. 109.

È noto che il problema, posto da LAGRANGE, di determinare la superficie minima ⁽¹⁾ avente un dato contorno, è stato risoluto dal punto di vista fisico da PLATEAU con una celebre esperienza. Esso però ha resistito per lungo tempo agli attacchi degli Analisti; tanto che solo in questi ultimi tempi ha ricevuto risposta esauriente, in casi abbastanza generali e sotto diverse ipotesi, per merito specialmente di GARNIER, DOUGLAS, RADÓ, MC SHANE. Le ricerche di questi A.A. — fondate sui risultati anteriori che RIEMANN, WEIERSTRASS e SCHWARZ avevano conseguito in argomento, e su quelli che il LEBESGUE nella sua Tesi aveva ottenuto precisando ed estendendo la nozione di area — sono in questa Monografia riasunte, coordinate ed in qualche punto semplificate.

Il Cap. I tratta brevemente dell'*area di una superficie curva secondo LEBESGUE, della rappresentazione conforme, dei parametri*

(1) Ad evitare equivoci, è preferibile questa locuzione a quella usuale di superficie ad area minima, per denotare una superficie avente in ogni punto *curvatura media nulla*.

isoterme su di una superficie e delle *corrispondenze* fra curve di JORDAN. Il Cap. II espone varie proprietà classiche di cui godono le *superficie minime* ⁽¹⁾ considerate in piccolo (sotto convenienti ipotesi di derivabilità). Il Cap. III passa allo studio in grande delle superficie suddette e, fra l'altro, dà alcune proprietà relative ai loro *punti singolari*, le *disuguaglianze* di CARLEMAN e di BECKENBACH involgenti l'area di una superficie minima e la lunghezza del suo contorno, nonché una serie di *proposizioni*, le quali chiariscono e precisano la nota analogia che passa fra la teoria delle superficie minime e quella delle funzioni di variabile complessa.

Quando nel problema di PLATEAU si lasci una certa generalità al contorno prescritto ed alla superficie da determinare, non sempre si ottengono come soluzioni superficie ad area minima, ossia *esistono superficie minime che non hanno l'area minima fra quelle collo stesso contorno* (SCHWARZ); non solo, ma il problema di PLATEAU non ha generalmente soluzione unica, ed il problema dell'area minima per un contorno di JORDAN assegnato ha infinite soluzioni, una generica delle quali non è una superficie minima. Ne risulta l'opportunità di meglio circoscrivere il problema: e si ottengono così vari *problemi* di PLATEAU (principalmente il problema non parametrico e quello parametrico) a seconda delle condizioni analitiche a cui si vuole soddisfare la rappresentazione della superficie che si cerca, ai quali si aggiunge il *problema della minima area* ed il *problema simultaneo*.

Il Cap. IV si occupa del *problema di PLATEAU nella forma non parametrica*, esponendo i risultati sull'argomento di LEBESGUE, HAAR e dello stesso RADÓ; si tratta in sostanza di questioni di calcolo delle variazioni, studiate sotto ipotesi assai meno restrittive di quelle che si adottano nella teoria classica (analoghe a quelle che si fanno pel problema di DIRICHLET nelle trattazioni più generali).

Il Cap. V incomincia coll'espone il metodo di GARNIER per la risoluzione del *problema di PLATEAU sotto forma parametrica*; tale metodo — sviluppando le vedute di WEIERSTRASS e di DARBOUX — poggia essenzialmente sulla costruzione di un'opportuna equazione differenziale del 2° ordine a coefficienti razionali, avente un dato gruppo di monodromia (problema di RIEMANN). Vi è inoltre un notevole *teorema di approssimazione* di DOUGLAS e RADÓ, e la risoluzione del *problema parametrico* data dal DOUGLAS, mediante l'ingegnosa considerazione di un certo funzionale; i procedimenti di questo A. sono autonomi e si applicano in spazi

(1) Ved. la nota precedente.

ad un qualunque numero di dimensioni: in particolare — nel piano — essi forniscono un nuovo metodo per la risoluzione del problema della rappresentazione conforme. Seguono le ricerche di RADÓ (basate sulla teoria della rappresentazione conforme), secondo le quali il *problema parametrico* vien risolto costruendo dapprima un'opportuna soluzione approssimata, da cui la soluzione esatta si deduce con passaggio al limite.

Il metodo di GARNIER non si presta alla risoluzione del problema simultaneo, mentre invece i metodi di RADÓ e di DOUGLAS conducono a soluzioni aventi per area un minimo. Il VI° ed ultimo Capitolo si occupa appunto di tali questioni e della soluzione di MCSHANE pel *problema simultaneo*, dando pure notizia di generalizzazioni, dovute al DOUGLAS, relative al caso di più contorni ed al caso di superficie (unilatera) del tipo del nastro di MÖBIUS.

BENIAMINO SEGRE

C. KURATOWSKI: *Topologie I. Espaces métrisables, espaces Complets.*
Varsavia e Lwow, 1933. (Pag. XI-285).

L'opera di cui viene presentato per ora il primo volume si propone di studiare, colla più minuta analisi, le questioni fondamentali riguardante la topologia. Questa, però, viene intesa in un senso alquanto diverso sia dalla tradizionale *Analysis situs* quale veniva considerata fra altri, dal nostro BETTI, sia dalla applicazione della Geometria algebrica: essa viene riattaccato nel modo più intimo alla teoria degli aggregati, alla *Mengenlehre* inteso nel senso più astratto: è questa teoria che deve condurre alla conoscenza di quelle proprietà che si possono dire topologiche, cioè invarianti per trasformazioni biunivoche e bicontinue. Una tale veduta non è nuova; essa si può scorgere nell'opera non più recente dell'HAUSDORFF, *Grundzüge der Mengenlehre*, si manifesta più chiaramente nel libro profondo e pur attraente del FRÉCHET, *les espaces abstraits*, ed ispira una parte non indifferente della ponderosa produzione della scuola polacca, rappresentata degli allievi e dai collaboratori dello SIERPINSKI. Fra questi, occupa un posto onorevole l'A. del presente volume, il quale, insieme a risultati propri, ha riunito ed ordinato quanto si può dire oggi sul non facile argomento. Egli si è proposto di attenersi ad un metodo rigorosamente astratto, metodo assiomatico in cui le deduzioni si operano mediante una algoritmia algebrico-logica, escludendo dal suo piano ogni riferimento all'intuizione. Termine primitivo del sistema è l'introduzione, accanto ad ogni aggregato A , della sua *chiusura* (fermeture) $\bar{A}$,

introdotta per via assiomatica ma che consiste nella aggiunzione, ad A , dell'insieme dei suoi punti limiti; essa viene definita mediante tre assiomi fondamentali (p. 14) ai quali, nel caso della trattazione, se ne aggiungono altri due (pag. 95 e p. 101) che servono a caratterizzare logicamente gli spazi che formano oggetto dell'opera.

Il presente volume contiene, al seguito di una introduzione di una decina di pagine, soli tre Capitoli, densi però di contenuto e di non breve estensione, contando rispettivamente 70, 120 e 80 pagine.

L'introduzione è dedicata alle operazioni della logica e della teoria degli aggregati; il primo Capitolo definisce assiomaticamente la già ricordata *chiusura*, dà le definizioni, le operazioni e le proprietà degli aggregati chiusi, aperti, frontiere, densi, ecc. pone la definizione di continuità e quella di omeomorfia, necessario strumento nelle considerazioni topologiche. Il secondo Capitolo introduce, sempre con metodo logico-assiomatico, i concetti di limite, di distanza, di coordinate; venendo così a definire gli spazi metrici in cui vale quanto può dare il concetto di distanza, e gli spazi separabili contenenti un aggregato denso numerabile.

Il terzo Capitolo è dedicato allo studio degli spazi completi, cioè spazi metrici in cui per ogni successione di elementi dello spazio soddisfacente alla usuale condizione di CAUCHY, risulta l'esistenza del limite per la successione stessa. Questo concetto non è topologico, ma le proprietà dello spazio completo in senso metrico si trasportano ad uno spazio che gli sia omeomorfo, e che viene detto allora completo in senso topologico.

L'abbondanza, la densità e la minuziosa analisi della materia svolta in questo volume non ci permette di entrare in maggiori particolari; diremo solo che il suo studio richiede dal lettore non particolarmente preparato una speciale attenzione ed un coscienzioso apprendimento del valore dei segni e della terminologia richiesti dallo sviluppo e che sono riassunti, sebbene non completamente, in un indice posto alla fine del volume. Lo studioso che superi questa difficoltà non potrà disconoscere l'utilità dell'opera cui l'A. ha dedicato, non senza efficacia, una così ragguardevole somma di lavoro.

(u)

J. FAVARD: *Leçons sur les fonctions presque-périodiques*. Paris, Gauthier-Villars, 1933 (pagg. VIII+180, Fr. 50).

L'opera si può dividere in due parti: l'una generale che espone i fondamenti della Teoria; l'altra relativa all'integrazione in cui è maggiore il contributo personale dell'A..

Nella prima parte il lettore trova i due teoremi fondamentali di BOHR, quello « di unicità », secondo il quale a funzioni *quasi-periodiche differenti corrispondono sempre serie di Fourier differenti*, e quello « di approssimazione », secondo il quale *ogni funzione quasi-periodica può essere approssimata quanto si vuole, ed uniformemente su tutta la scala lineare, per mezzo di polinomi esponenziali*. Le dimostrazioni sono notevolmente semplificate (Cap. I e II).

Per il primo teorema l'A. segue essenzialmente il DE LA VALLÉE POUSSIN (1), facendo, in sostanza, appello alla sola continuità della funzione di λ

$$a(\lambda) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i\lambda x} dx,$$

nella vicinanza dei valori λ in cui è $a(\lambda) = 0$ ($f(x)$ è la funzione quasi-periodica) e a un « procedimento di composizione » (2) dovuto al WEYL.

Del teorema di approssimazione si espone una dimostrazione molto elegante, dovuta essa pure al WEYL, e che evita l'uso del celebre teorema di KRONECKER sull'approssimazione diofantea (questo viene anzi dedotto poi come un'applicazione). Con questo metodo, i polinomi d'approssimazione assumono la forma seguente

$$P_N(x) = \sum_{n=1}^N M_n e^{i\Lambda_n x}, \quad \text{con} \quad M_n = \frac{1}{kh} A_n \int_0^h e^{i\Lambda_n x} dx \sum_{r=1}^k e^{i\Lambda_n \tau_r}, \quad A_n = a(\Lambda_n)$$

(h è un numero qualunque > 0 ma sufficientemente piccolo ($\lim_{N \rightarrow \infty} h = 0$); k è un intero qualunque > 0 ma sufficientemente grande ($\lim_{N \rightarrow \infty} k = \infty$); $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ sono opportuni quasi-periodi di $f(x)$).

Viene pure riportata un'altra dimostrazione, dovuta al BOCHNER, estensione, in sostanza, alle funzioni quasi-periodiche, del ben noto metodo dato dal FEJER per le funzioni periodiche (3).

Se una funzione quasi-periodica $f(x)$ ha *tutti i suoi coefficienti di Fourier positivi*, la sua serie di FOURIER è assolutamente convergente per ogni valore di x e quindi, per il teorema di unicità, la sua somma è uguale alla funzione $f(x)$.

Nel Cap. III l'A. tratta di applicazioni della teoria generale alle equazioni differenziali, che si riferiscono a sue ricerche per

(1) « Ann. Soc. Sci. Bruxelles », t. 47, 1927, p. 141 e t. 48, 1928, p. 56.

(2) « Math. Ann. », t. 97, Heft 1-2, 1926, p. 338.

(3) Vedi per es. L. TONELLI, *Serie trigonometriche*. (Zanichelli, 1928), pp. 167 e segg..

sonali. È la parte originale del libro. L' A. considera un sistema di equazioni differenziali lineari

$$(S_x) \quad \frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n f_{i,j}(x)y_j + g_i(x), \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

di cui si suppone che i coefficienti $f_{i,j}(x)$ e $g_i(x)$ siano funzioni quasi-periodiche. Indica con $H(S_{x+h})$ l'insieme: 1°) di tutti i sistemi (S_{x+h}) che si ottengono dando, nei detti coefficienti, un incremento arbitrario h alla variabile; 2°) di tutti i sistemi (S_x^*) che si ottengono come limiti di successioni di sistemi $S_{(x+h_\nu)}$ ($\nu=1, 2, \dots$), quando esistano successioni $\{h_\nu\}$ ($\nu=1, 2, \dots$) di detti incrementi, per le quali i coefficienti $f_{i,j}(x+h_\nu)$, $g_i(x+h_\nu)$ tendano uniformemente in tutta la scala lineare verso delle funzioni limiti $f_{i,j}^*(x)$, $g_i^*(x)$. Detti (Σ_x) , (Σ_x^*) i sistemi omogenei corrispondenti agli (S_x) , (S_x^*) , si dimostra allora che, se nessuno dei sistemi dell'insieme $H(\Sigma_{x+h})$ ha delle soluzioni limitate il cui valore assoluto possa diventare piccolo a piacere (esclusa, naturalmente, la soluzione banale $y_i=0$) e se (S_x) ha delle soluzioni limitate, almeno una di queste è quasi-periodica con modulo $\sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i^2(x)|} \leq$ al modulo di (S_x) . E la stessa tesi vale anche per ogni altro sistema dell'insieme $H(S_{x+h})$. Questo teorema viene applicato allo studio dell'equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x)y + \psi(x) \quad [\varphi(x) \neq 0],$$

($\varphi(x)$, $\psi(x)$ funzioni quasi-periodiche reali) che s'incontra nella teoria delle perturbazioni.

Nel Cap. IV l' A. espone la teoria delle funzioni analitiche quasi-periodiche, la quale non sembra, dopo la terza Memoria fondamentale del BOHR (1), avere subito importanti sviluppi. Infine il Cap. V mette il lettore al corrente delle generalizzazioni delle funzioni quasi-periodiche. Tali generalizzazioni prendono le mosse da opportune generalizzazioni della nozione di « distanza $D[f(x), g(x)]$ di due funzioni $f(x)$, $g(x)$ ». Solitamente si pone

$$D[f(x), g(x)] = \limsup_{-\infty < x < +\infty} |f(x) - g(x)|$$

e la condizione $D[f_n(x), f(x)] < \varepsilon_n$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$) è quella che serve a definire la convergenza uniforme di una successione di funzioni $f_n(x)$ verso una funzione limite $f(x)$. Si sono studiate le gene-

(1) « Acta Math. », t. 47, 1926, pp. 237-281.

realizzazioni che corrispondono alle definizioni seguenti (particolari « convergenze in media »):

$$D[f(x), g(x)] = \limsup_{-\infty < x < +\infty} \left[\frac{1}{L} \int_0^{x+L} |f(x) - g(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (\text{STEPANOFF})$$

(p intero qual. > 0 , L numero reale qual. > 0):

$$D[f(x), g(x)] = \lim_{L \rightarrow +\infty} \left\{ \limsup_{-\infty < x < +\infty} \left[\frac{1}{L} \int_x^{x+L} |f(x) - g(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \right\}, \quad (\text{WEYL});$$

$$D[f(x), g(x)] = \left\{ \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f(x) - g(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad (\text{BESICOVITCH}).$$

Il libro è scritto con sobrietà e con gusto. Contiene gli elementi indispensabili per la lettura delle memorie e per la ricerca.

TULLIO VIOLA

EDMOND BAUER: *Introduction à la théorie des groupes et à ses applications à la Physique Quantique*. (Extrait des Annales de l'Institut H. Poincaré), Paris, Les presses universitaires de France, 1933 (pag. 170 in 8.º gr.).

I trattati più o meno vasti e più o meno originali sulle moderne teorie quantistiche si succedono ormai numerosi, senza tuttavia che possa in essi vedersi l'avviamento verso una sistemazione in cui si associno il rigore matematico, la chiarezza delle ipotesi e l'aderenza ai fatti sperimentali. Il presente trattato è matematico e non fisico, perchè, anche quando si accenna a fenomeni, come *effetto Zeemann*, *effetto Stark*, il lettore non saprebbe trovarvi un riferimento ai fatti sperimentali che portano questi nomi, ma appena un accenno alle ipotetiche perturbazioni atomiche di cui si ammette essi siano la manifestazione: nè pare che l'intima coscienza dell'A. sia molto sicuramente ancorata alle teorie ch'egli espone, poichè si legge (p. 33) « Le bref raisonnement qui précède peut, avec juste raison, sembler bien audacieux et un peu étrange. Mais il ne fait que résumer quelques années d'efforts ». In quanto matematico, il lettore vi troverà qualche lacuna e qualche incertezza: così (fatto che rileviamo perchè troppo comune nelle abituali esposizioni dei fisici) parlando di autovalori e di autofunzioni dell'equazione di SCHROEDINGER non si pone affatto in evidenza che il discorrerne è senza significato se non si fissano le condizioni al contorno del campo: solo incidentalmente e per altro scopo queste

condizioni appaiono accennate alla pag. 40. Ma sono osservazioni queste che, come si disse, non riguardano questo libro in particolare: il quale invece informa efficacemente dei recenti sviluppi delle teorie che si collegano alla meccanica ondulatoria, particolarmente di quelle che gli danno il titolo; e contiene a questo riguardo veramente assai più del compito modesto a cui l'A. ha voluto designarlo di preparazione alla lettura di maggiori trattati.

Riassumiamo brevemente questo contenuto: Cap. I: Spazi vettoriali a n dimensioni; spazio funzionale; operatori. - Cap. II: Principi della meccanica quantistica. - Cap. III: Principi della teoria dei gruppi, in particolare gruppi di sostituzioni lineari. - Cap. IV: Generalità sull'applicazione della teoria dei gruppi alla meccanica quantistica. Teorema di VIGNER. - Cap. V: Gruppi di rotazioni e loro interpretazione nella meccanica atomica e nello studio delle perturbazioni dovute a campi a simmetria circolare (ZEEMANN, STARK).

B. LEVI