
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

TULLIO VIOLA

Studi recenti intorno al concetto d'integrale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **13** (1934), n.2, p. 110–118.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_2_110_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_2_110_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RELAZIONI SCIENTIFICHE

Studi recenti intorno al concetto d'integrale.

1. La definizione dell'integrale non ha cessato, in questi ultimi anni, di attirare l'attenzione di numerosi ricercatori. Dopo il progresso notevole realizzato in questo campo dalla scoperta dell'integrale di LEBESGUE e dalle generalizzazioni del DENJOY e del PERRON, si continuano ad elaborare i concetti, soprattutto nell'intento di stabilire un legame più stretto con la classica definizione di CAUCHY-RIEMANN, come limite di somme $\sum f_n \Delta_n$. Si osserva subito che tutte le definizioni note soddisfano alla proprietà additiva d'intervallo e al primo teorema della media, per cui, diviso arbitrariamente l'intervallo $a-b$ in parti Δ_n , valgono sempre uguaglianze della forma

$$\int_b^a f(x) dx = \sum_n \int_{\Delta_n} f(x) dx = \sum_n f_n \Delta_n,$$

dove i singoli valori medi f_n sono *convenientemente scelti* fra i limiti estremi dei valori assunti da $f(x)$ in Δ_n . Questa osservazione basta a mostrare che *ogni definizione d'integrale* deve potersi ricondurre al tipo riemanniano (DINI, LEBESGUE, HAHN,...). Sono state studiate le tre definizioni seguenti.

a) Supposta la funzione $f(x)$ finita e misurabile in $a-b$, fissiamo ad arbitrio due numeri α, β positivi e la cui somma sia < 1 . Per ogni intervallo Δ_n della suddivisione di $a-b$, indichiamo con M_n il massimo numero μ tale che l'insieme dei valori di x in Δ_n nei quali è $f(x) \geq \mu$ abbia misura $\geq \alpha \Delta_n$, e indichiamo analogamente con m_n (evidentemente $\leq M_n$) il minimo numero μ tale che l'insieme dei valori di x in Δ_n nei quali è $f(x) \leq \mu$ abbia misura $\geq \beta \Delta_n$. Se le somme $\sum_n M_n \Delta_n$, $\sum_n m_n \Delta_n$ così definite e relative a una suddivisione variabile tendono verso uno stesso limite I (indipendentemente dalla coppia α, β) quando il passo (massimo dei Δ_n) di questa suddivisione tende a zero, si dirà che $f(x)$ è integrabile in $a-b$ e

si porrà, per definizione, $\int_a^b f(x)dx = I$ ⁽¹⁾. Si dimostra che questa definizione coincide con quella classica dovuta al LEBESGUE ⁽²⁾.

b) Consideriamo la nuova funzione

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } a \leq x < b \\ f(x - [b - a]) & \text{per } b \leq x < b + [b - a], \end{cases}$$

e poniamo

$$S(t) = \sum_n f_1(\xi_n + t) \Delta_n,$$

essendo t una nuova variabile tale che $0 < t < b - a$ e ξ_n dei valori di x scelti ad arbitrio entro i rispettivi Δ_n . Se esiste un numero I' tale che, qualunque sia il numero positivo ε , la misura dell'insieme dei valori di t per i quali è $|I' - S(t)| > \varepsilon$ tende a zero insieme col passo della suddivisione di $a - b$, si porrà per definizione

$\int_a^b f(x)dx = I'$ ⁽³⁾. T. J. BOKS ha studiato con grande accuratezza un procedimento d'integrazione che differisce leggermente da questo, e ciò affinché sia assicurata l'integrabilità di una funzione $f(x)$ in ogni intervallo parziale di un intervallo più ampio nel quale $f(x)$ è integrabile. Egli considera uno spezzamento in intervalli parziali non del solo intervallo $a - b$, ma di tutta la scala lineare, mediante una successione di punti di divisione indefinitamente estesa nei due sensi.

Siano x_n, ξ_n ($n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$), con le condizioni

$$x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n, \quad 0 < x_n - x_{n-1} = \Delta_n < \delta \text{ (passo della suddivisione),}$$

questi punti. Supposta $f(x)$ misurabile, definita in tutto l'intervallo $a - b$ (chiuso o aperto), formiamo, per ogni valore di t , la

(1) A. DENJOY, *Sur l'intégration riemannienne* (« C. R. De l'Acad. des Sc. de Paris », t. 169, 1919, p. 219). ST. KEMPISTY, *Un nouveau procédé d'intégration des fonctions mesurables non sommables* (« C. R. de l'Acad. des Sc. », t. 180, 1925, p. 812); *Sur l'intégrale (A) de M. Denjoy* (Ibid., t. 185, 1927, p. 749); *Sur l'intégrale (A) de M. Denjoy* (Ibid. t. 192, 1931, p. 1186).

(2) A. DENJOY, *Sur la définition riemannienne de l'intégrale de Lebesgue* (« C. R. de l'Acad. des Sc. », t. 193, 1931, p. 695).

(3) A. DENJOY, Loc. cit. alla nota (1). T. J. BOKS, *Sur les rapports entre les méthodes d'intégration de Riemann et de Lebesgue* (« Rendiconti del Circ. Matematico di Palermo », t. 45, 1921, p. 211).

somma

$$S(t) = \sum_n f(\xi_n + t) \Delta_n,$$

estesa a tutti i valori di n per i quali è $a \leq \xi_n + t \leq b$. Diremo che $f(x)$ è integrabile ed ha per integrale I' , se la misura dell'aggregato dei valori di t per i quali è

$$|S(t) - I'| > \varepsilon, \quad \text{con } \alpha < t < \beta,$$

tende a zero con δ , qualunque siano ε , α , e β fissi (ε piccolo). Si dimostra che ogni funzione $f(x)$ integrabile secondo LEBESGUE è integrabile anche secondo questa definizione e che allora è preci-

samente $I' = \int_a^b f(x) dx$. Esistono però funzioni (naturalmente non

limitate) integrabili secondo questo procedimento e non integrabili secondo LEBESGUE, altre integrabili secondo CAUCHY-RIEMANN (come integrali generalizzati nel senso arbitrario) e non integrabili nè secondo LEBESGUE nè secondo questo procedimento. Il BOKS ha studiate anche delle ulteriori generalizzazioni di questo tipo d'integrale supponendo che la suddivisione mobile $(x_n + t, \xi_n + t)$ vari, per così dire, non linearmente, ma in altro modo.

c) Si scelgano ad arbitrio due successioni $\{\eta_1^{(n)}\}$, $\{\eta_2^{(n)}\}$ di numeri positivi tali che, per ogni $n = 1, 2, 3, \dots$, sia $\eta_1^{(n)} < \eta_2^{(n)} < 1$. Se t è una nuova variabile tale che $0 < t < b - a$, si indichi con $k = k(t)$ il massimo intero positivo tale che $a + \sum_{n=1}^k \eta_2^{(n)} t < b$ e si ponga

$$\left. \begin{aligned} \Delta_n &= \eta_2^{(n)} t \\ x_n &= a + \sum_{v=1}^n \Delta_v - \eta_1^{(n)} t \\ S(t) &= \sum_{n=1}^k f(x_n) \Delta_n, \end{aligned} \right\} (n = 1, 2, \dots, k).$$

La somma $S(t)$ è una funzione della variabile t . Si dimostra che, se $f(x)$ è integrabile in $a-b$ secondo LEBESGUE, allora:

z) $S(t)$ tende verso un limite determinato e finito I'' , quando $t \rightarrow +0$ in modo qualunque fatta al più eccezione per i valori di un aggregato che ha densità nulla a destra del punto $t=0$; e ciò indipendentemente dalle successioni $\{\eta_1^{(n)}\}$, $\{\eta_2^{(n)}\}$ prefissate;

$$\beta) \text{ è } I'' = \int_a^b f(x) dx.$$

La condizione z) definisce un nuovo tipo d'integrale ⁽⁴⁾, il cui

⁽⁴⁾ A. DENJOY, loc. cit. alla nota ⁽¹⁾.

studio non è stato ancora approfondito. L'A. ritiene probabile che esso sia, come quello definito alla lettera b), più generale dell'integrale di LEBESGUE.

Nelle definizioni precedenti è imposta la condizione restrittiva che i valori f_n che compajono nella somma $\sum_n f_n \Delta_n$ siano *effettivamente assunti* dalla $f(x)$ in determinati punti x_n dei corrispondenti intervalli Δ_n . Consideriamo tali punti x_n come i valori assunti da una certa funzione φ , di due variabili ξ, η , in corrispondenza degli estremi ξ_n, η_n dei Δ_n . G. DANTONI ⁽⁵⁾ ha dimostrato che, se le somme $\sum_n f_n \Delta_n$ tendono ad un limite I_φ determinato e finito (al tendere comunque a zero del passo della suddivisione), in corrispondenza di una funzione $\varphi(\xi, \eta)$ *continua*, allora la condizione d'integrabilità di RIEMANN è soddisfatta ed è per conseguenza

$$I_\varphi = {}^{(R)} \int_a^b f(x) dx.$$

Questa condizione non è però affatto necessaria. Il DANTONI è riuscito a caratterizzare, per una funzione $\varphi(\xi, \eta)$ *arbitrariamente assegnata*, la classe delle funzioni $f(x)$ per le quali l'esistenza di uno dei due limiti $I_\varphi, {}^{(R)} \int_a^b f(x) dx$ ha per conseguenza quella dell'altro ⁽⁶⁾.

2. Un altro argomento che continua ad essere oggetto di ricerca è il procedimento di *Totalizzazione* dovuto al DENJOY. Per quanto riguarda le memorie originali del DENJOY, il lettore può consultare i trattati che le riassumono ⁽⁷⁾: noi vogliamo qui dare breve notizia soltanto dei progressi realizzati nell'ultimo decennio.

Il LEBESGUE è riuscito a ritrovare il procedimento di totaliz-

⁽⁵⁾ G. DANTONI, *Sul confronto di alcune definizioni di integrale definito* (« Fundamenta Mathematicae », t. 19, 1932, p. 29).

⁽⁶⁾ *Riemanniana* (sebbene con altra accezione del termine) può dirsi anche la definizione dell'integrale di LEBESGUE data da B. LEVI, tanto più notevole in quanto ne è esclusa completamente la teoria della misura. Vedi B. LEVI, *Sulla definizione dell'integrale* (« Annali di Matematica pura ed applicata », serie IV, t. I, 1924, p. 57); G. VITALI, *Sulla definizione di integrale delle funzioni di una variabile* (Ibid., t. II, 1925, p. 111).

⁽⁷⁾ Vedi per es. H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration* (« Collezione Borel, 2^a ediz. », 1928, pp. 202 e segg.); E. W. HOBSON, *The theory of functions of a real variable* (vol. I, 1927, pp. 649 e segg.); E. PASCAL-E. SALKOWSKI, *Repertorium der höheren Analysis* (vol. I², 1929, pp. 1080 e segg.).

zazione limitatamente al problema della *ricerca della funzione primitiva di una derivata finita* ed appoggiandosi a proprietà molto semplici delle funzioni derivate ⁽⁸⁾. Una funzione derivata $f(x)$, essendo al più della prima classe di Baire, è, come si sa, *puntualmente discontinua* sopra ogni aggregato perfetto. In base a questa proprietà, si dimostra facilmente che, assegnati ad arbitrio un aggregato chiuso E e un numero positivo ε , esiste sempre un intervallo δ contenente punti di E nel suo interno, tale che $f(x)$ ha oscillazione inferiore ad ε sulla parte di E contenuta in δ e che la serie $\Sigma_\delta[F(\beta) - F(\alpha)]$ estesa alle parti $\alpha-\beta$ degli intervalli contigui ad E che sono contenuti in δ , è assolutamente convergente. È possibile allora determinare sull'intervallo $a-b$ una successione transfinita di aggregati chiusi E_λ , ciascuno contenuto e non denso nei precedenti, in modo che sia:

1°) $E_1 \equiv a-b$.

2°) Per ogni indice transfinito λ di seconda specie, E_λ è l'aggregato di tutti i punti comuni a tutti gli $E_{\lambda'}$, con $\lambda' < \lambda$.

3°) Detta $E_\lambda^{(6)}$ la parte di E_λ contenuta in un qualunque intervallo $\delta \equiv \mu-\nu$ il quale sia completamente interno a un generico intervallo $\bar{\mu}-\bar{\nu}$ ($\mu < \bar{\mu} < \bar{\nu} < \nu$) contiguo a $E_{\lambda+1}$ ($\lambda = 1, 2, 3, \dots, \omega, \omega + 1, \dots$), $f(x)$ ha, su $E_\lambda^{(6)}$, oscillazione $< \varepsilon$, e la serie $\Sigma_\delta[F(\beta) - F(\alpha)]$, estesa agl'intervalli $\alpha-\beta$ contigui a $E_\lambda^{(6)}$, è assolutamente convergente. Si costruisce allora una funzione $F_\varepsilon(x)$, gradualmente sopra ogni aggregato $E_\lambda - E_{\lambda+1}$, secondo la regola seguente. È, in δ ,

$$F_\varepsilon(\nu) - F_\varepsilon(\mu) = \Sigma_\delta[E_\varepsilon(\beta) - F_\varepsilon(\alpha)] + f_0 m(E_\lambda^{(6)}),$$

essendo f_0 uno dei valori (a priori qualunque) assunti da $f(x)$ su $E_\lambda^{(6)}$ ed $m(E_\lambda^{(6)})$ la misura di $E_\lambda^{(6)}$. È poi

$$F_\varepsilon(\bar{\nu}) - F_\varepsilon(\bar{\mu}) = \lim_{\substack{\mu \rightarrow \bar{\mu}+0 \\ \nu \rightarrow \bar{\nu}-0}} [F_\varepsilon(\nu) - F_\varepsilon(\mu)]$$

Quest'ultimo passaggio al limite si adotta anche per definire la variazione di $F_\varepsilon(x)$ sopra gl'intervalli contigui agli E_λ con λ di seconda specie.

$F_\varepsilon(x)$ risulta così definita a meno di una costante additiva in tutto $a-b$. Essa differisce dalla primitiva $F(x)$ per meno di ε dal

(8) H. LEBESGUE, *Sur la recherche des fonctions primitives* (« Acta Mathematica », t. 49, 1926, p. 245).

punto di vista differenziale, cioè si ha

$$\left| \frac{F_\varepsilon(x_2) - F_\varepsilon(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1} \right| < \varepsilon,$$

per ogni coppia di valori x_1, x_2 in a^-b . $F(x)$ viene infine ottenuta come limite di $F_\varepsilon(x)$ per $\varepsilon \rightarrow 0$.

Io mi sono occupato recentemente di un problema analogo: quello di costruire la primitiva di una funzione $f(x)$, che sia la derivata destra di una funzione *continua verso destra e derivabile verso destra in a^-b* ⁽⁹⁾. Questo problema ha naturalmente un grado d'indeterminazione maggiore del precedente, perchè la primitiva non può essere qui determinata che a meno di una funzione additiva arbitraria, continua verso destra ed avente in ogni punto di a^-b derivata destra nulla. Ho dato un procedimento, simile alla totalizzazione sotto molti punti di vista, mediante il quale, assegnato ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, si può costruire in a^-b una funzione continua verso destra $F_\varepsilon(x)$ avente $f(x)$ per derivata destra in quasi tutto a^-b , cioè fatta al più eccezione per un aggregato E di valori della x in a^-b avente misura nulla e sul quale i numeri derivati destri della $F_\varepsilon(x)$ differiscono da $f(x)$ per meno di ε . Tale aggregato E è non denso in a^-b ed è indipendente da ε .

3. Altro problema studiato è quello della *eliminazione del calcolo transfinito dalla totalizzazione di Denjoy*. Le prime ricerche a questo scopo, dovute a N. LUSIN e A. KHINTCHINE, sono state approfondite in questi ultimi anni soprattutto ad opera di S. SAKS e di P. ROMANOVSKI ⁽¹⁰⁾. Non sembra effettivamente che si possa dare una definizione *costruttiva* della totale, senza ricorrere al calcolo transfinito. Ma una definizione *esistenziale* (o *descrittiva*) può dirsi oggi acquisita in una forma non ulteriormente perfezionabile.

Seguendo l'operazione del ROMANOVSKI, introduciamo il simbolo $\Delta_P F(x)$ per rappresentare la *variazione* di una funzione continua $F(x)$ su un aggregato limitato perfetto P , cioè il numero

$$\Delta_P F(x) = F(\beta) - F(\alpha) - \sum (F(\beta_i) - F(\alpha_i)),$$

⁽⁹⁾ T. VIOLA, *Étude sur la détermination d'une fonction discontinue par sa dérivée unilatérale* (« Annales de l'École Norm. Supérieure », ⁽³⁾ L, 1933).

⁽¹⁰⁾ S. SAKS, *Sur l'intégrale de M. Denjoy* (« Fundamenta Mathematicae », t. XV, 1930, p. 242). P. ROMANOVSKI, *Essai d'une exposition de l'intégrale de Denjoy sans nombres transfinis* (Ibid. t. XIX, 1932, p. 38).

α e β essendo gli estremi di P ed α_i, β_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) gl' intervalli contigui a P . Attribuiamo un senso al simbolo $\Delta_P F(x)$ solamente nel caso in cui la serie

$$\sum |F(\beta_i) - F(\alpha_i)|$$

è convergente. Ciò posto, si dirà che una funzione $f(x)$, definita in quasi-tutto a^-b è totalizzabile in a^-b , se esiste almeno una funzione $F(x)$ continua in a^-b tale che, assegnato ad arbitrio un insieme perfetto P in a^-b , esista almeno una porzione $\bar{P}$ di P tale che, su ogni sottoporzione $\bar{P}$ di $\bar{P}$ ⁽¹¹⁾, la $f(x)$ sia integrabile secondo LEBESGUE e sia

$$\Delta_{\bar{P}} F(x) = {}^{(L)} \int_{\bar{P}} f(x) dx.$$

Si vede facilmente che, se $f(x)$ è totalizzabile (secondo la definizione ora posta), la funzione $F(x)$ risulta definita a meno di una costante additiva ed è perciò lecito porre

$${}^{(D)} \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Il ROMANOSKI dimostra come, da questa definizione descrittiva, si possano dedurre le proprietà fondamentali di cui gode la totale indefinita; così per es.:

a) La totale indefinita ha quasi-dappertutto una derivata asintotica ⁽¹²⁾ uguale alla funzione totalizzanda.

⁽¹¹⁾ Porzione $\bar{P}$ di un aggregato perfetto P è la parte di P che è contenuta in un intervalle. Sottoporzione è una porzione della porzione.

⁽¹²⁾ Definizione dovuta ad A. KHINTCHINE (*Sur une extension de l'intégrale de M. Denjoy*. « C. R. des Sciences de l'Académie des Sciences », t. 162, 1916, p. 287). Si dice che una funzione $F(x)$, continua o no, possiede una derivata asintotica (approssimativa, secondo la terminologia del DENJOY) nel punto $x = x_0$, se esiste un insieme misurabile E di densità 1 nel punto x_0 , tale che il rapporto incrementale

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

tende a un limite ben determinato quando x tende a x_0 , per valori arbitrari, purché appartenenti ad E . (Cfr. la definizione riemanniana del n. 1, c). Questo limite è, per definizione, il valore della derivata asintotica nel punto x_0 .

b) Ogni funzione integrabile secondo LEBESGUE-DIRICHLET è sempre totalizzabile, e la totale coincide con l'integrale di LEBESGUE-DIRICHLET.

c) Ogni funzione derivata è totalizzabile e la sua totale indefinita coincide con la sua primitiva.

5. Prossime all'ordine d'idee di queste ultime ricerche sono quelle di J. C. BURKILL e di J. RIDDER, dirette a generalizzare ulteriormente le definizioni del DENJOY e del PERRON. Ma la nostra impressione è che i risultati di tali studi, assai complicati e difficili, non siano corrispondenti agli sforzi che essi sono costati, apparendo come costruzioni piuttosto a carattere soggettivo che rispondenti a problemi insiti nella natura stessa della teoria delle funzioni. E poichè lo spazio ristretto non ci permette di trattenerci sopra ogni dettaglio, rimandiamo il lettore alle pubblicazioni di questi autori ⁽¹³⁾. Chiudiamo invece la nostra relazione con un cenno sulle ricerche di MENCHOFF e di SAKS intorno alle funzioni che verificano la condizione detta di LUSIN.

Si dice che una funzione $F(x)$, continua in tutto un intervallo $a-b$ verifica in $a-b$ la condizione di LUSIN, se a un qualunque insieme di valori di x in $a-b$ avente misura nulla, essa fa corrispondere un insieme di valori $F(x)$ avente misura nulla ⁽¹⁴⁾. Se la funzione $F(x)$ è un integrale indefinito secondo LEBESGUE, o più generalmente secondo DENJOY, essa soddisfa alla condizione di LUSIN: Ma l'inverso non è vero. A quali condizioni supplementari deve soddisfare la derivata [un numero derivato] di una funzione soddisfacente alla condizione di LUSIN, affinchè questa funzione sia un integrale indefinito secondo LEBESGUE [secondo DENJOY]?

Si dimostrano le proposizioni seguenti:

a) Se un numero derivato d'una funzione continua $F(x)$ che soddisfa alla condizione di LUSIN è integrabile secondo LEBESGUE, allora $F(x)$ è assolutamente continua.

b) Se per una funzione continua $F(x)$ che soddisfa alla con-

⁽¹³⁾ J. C. BURKILL, *The Approximately Continuous Perron Integral* (« Mathematische Zeitschrift », Bd. 34, Heft 2, 1931, p. 270); J. RIDDER, *Ueber den Perronschen Integralbegriff und seine Beziehung zu den R —, L — und D — Integralen* (Ibid., p. 234); J. RIDDER, *Ueber approximativ stetige Denjoy-Integrale* (« Fundamenta Mathematicae », t. XXI, 1933, p. 1); J. RIDDER, *Ueber das allgemeine Denjoysche Integral* (Ibid., p. 11).

⁽¹⁴⁾ N. LUSIN, *L'intégrale et la série trigonométrique* (« Thèse de l'Université de Moscou », 1915, p. 109).

dizione di LUSIN, si ha quasi dappertutto

$$\underline{D}F(x) \leq u(x), \quad (15)$$

$u(x)$ essendo una qualunque funzione integrabile secondo DENJOY, $F(x)$ è un integrale indefinito secondo DENJOY ⁽¹⁵⁾.

TULLIO VIOLA

(15) Il simbolo $\underline{D}F(x)$ rappresenta la *derivata inferiore*, cioè la funzione che, per ogni valore di x , è uguale al più piccolo dei quattro numeri derivati estremi di $F(x)$.

(16) M. MENCHOFF, *Sur la représentation conforme* (« Mathematische Annalen », t. 95, 1926); S. SAKS, *Sur les fonctions continues à un nombre dérivé sommable* (« Fundamenta Mathematicae », t. VII, 1925, p. 290); S. SAKS, *La condition (N) et l'intégrale de MM. Denjoy-Perron* (Ibid., t. XIII, 1929, p. 218); S. SAKS, *Sur une certaine classe de fonctions d'ensemble* (« Bulletin de l'Académie Polonaise », (A), 1926).