BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

LAMBERTO CESARI

Sulle condizioni sufficienti per le successioni di Fourier

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.2, p. 100–104.
Unione Matematica Italiana
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_2_100_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Sulle condizioni sufficienti per le successioni di Fourier.

Nota di LAMBERTO CESARI (a Monaco di Baviera).

Sunto. - *Si dimostra un teorema generale nel quale rientrano come casi particolari molte note condizioni sufficienti per le successioni di Fourier e dal quale si possono dedurre, come si mostra con esempi, nuove condizioni sufficienti.*

1. Sia

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \tag{1}$$

una serie trigonometrica. Facendo uso delle differenze di ordine intero Δa_n, Δb_n, $\Delta^2 a_n$ delle due successioni a_n e b_n, SZIDON (1), YOUNG (2), KOLMOGOROFF (3), hanno stabilito note condizioni suffi-

(1) S. SZIDON, *Reihentheoretische Sätze und ihre Anwendungen in der Theorie der Fourierschen Reihe.* « Math. Zeitschr. », Bd. 10 (1921), pp. 121-127.

(2) W. H. YOUNG, *On the Fourier series of bounded function.* « Proc. Lond. Math. Soc. », S. 2, Vol. 12 (1913), pp. 41-70.

(3) A. KOLMOGOROFF, *Sur l'ordre de grandeur des coefficients de la série de Fourier-Lebesgue.* « Bulletin int. de l'Ac. pol. des sciences et lettres ».

cienti affinchè la (1) sia la serie di FOURIER di una funzione integrabile secondo LEBESGUE.

Facendo uso delle differenze di ordine reale qualunque delle due successioni a_n e b_n, io ho potuto stabilire due nuove condizioni sufficienti, l'una relativa alle differenze $\Delta^\sigma a_n$ d'ordine $0 < \sigma < 1$, l'altra relativa alle differenze d'ordine $\sigma > 1$ [1]. Quest'ultima, che generalizza i teoremi di YOUNG e di KOLMOGOROFF, è stata contemporaneamente dimostrata anche dal MOORE [2].

Ora il prof. MAMBRIANI mi ha gentilmente fatto osservare come il concetto di differenze di una successione si possa grandemente generalizzare e tale generalizzazione conservi la massima semplicità formale mediante l'uso della sua « Algebra delle Successioni ».

In questa Nota, facendo sostanzialmente uso di tale concetto, dimostro un teorema molto generale, nel quale rientrano come casi particolari tutte le proposizioni sopra ricordate e dal quale, come io mostro con alcuni esempi elementari, si possono dedurre molte altre nuove ed utili condizioni sufficienti.

2. Sia $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ una successione di numeri complessi qualsiasi con $\alpha_0 \neq 0$; esiste allora una nuova successione $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots$ con $\gamma_0 \neq 0$ tale che

$$\alpha_0\gamma_0 = 1, \quad \alpha_0\gamma_n + \alpha_1\gamma_{n-1} + \dots + \alpha_n\gamma_0 = 0, \quad n = 1, 2, \dots \text{ [3]}.$$

Vale ora il seguente

TEOREMA. — a) *Se, posto*

$$\mathfrak{D}a_n = \sum_{t=0}^{\infty} \alpha_t a_{n+t} \text{ [4]}, \quad a_n^* = \sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t \mathfrak{D}a_{n+t} \qquad (n = 0, 1, \dots)$$

queste serie convergono ed è $a_n = a_n^*$ *per ogni* $n = 0, 1, \dots$;

(1) L. CESARI, *Sulle condizioni sufficienti per le successioni di Fourier.* « Annali della R. Scuola Normale Sup. di Pisa », S. II, Vol. III (1934), pp. 105-134.

(2) C. N. MOORE, *On criteria for Fourier constants of L integrable Functions.* « Proc. of the Math. Acad. of Sciences », Vol. 19 (1933), pp. 846-848.

(3) Secondo le notazioni del prof. MAMBRIANI, γ_n, successione inversa isobarica di α_n, è definita dalla posizione $\alpha_n \underset{n}{\cdot} \gamma_n = \varepsilon_n$. Vedi A. MAMBRIANI, *Sull'Algebra delle Successioni,* Mem. 1ª, « Annali di Matematica », S. IV, T. VII (1930), pp. 103-139 e spec. pag. 125.

(4) I numeri $\mathfrak{D}a_n$ così definiti vengono quì a sostituire le ordinarie differenze della successione a_n, in armonia a quanto ebbe a propormi il prof. MAMBRIANI.

b) *se, posto*

$$\theta(x;\, n, p) = \frac{1}{2}\gamma_n + \sum_{t=1}^{p} \gamma_{n-t} \cos tx, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq p \leq n, \text{ interi,}$$

esiste una successione $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots$ *e una funzione non negativa* $\psi(x)$ *di* $(0, 2\pi)$ *tali che*

$$|\theta(x;\, n, p)| < \mu_n \cdot \psi(x), \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\mathfrak{D}a_n| \cdot \mu_n < \infty$$

dove la $\psi(x)$ *è finita ovunque, e non limitata al più nell'intorno di punti* I *di* $(0, 2\pi)$ *in numero finito;*

c) *se esiste una successione* $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n, \ldots$ *tale che*

$$\int_0^{2\pi} |\theta(x;\, n, p)|\, dx < \nu_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\mathfrak{D}a_n|\, \nu_n < \infty;$$

allora la serie

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{2}$$

è di Fourier.

Analoga proposizione vale per le serie di soli seni.

3. Per la dimostrazione si può confrontare il mio lavoro citato. Qui basti il seguente cenno. Si osservi intanto che per la a)

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{p} a_n \cos nx = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t \mathfrak{D}a_t + \sum_{n=1}^{p} \cos nx \sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t \mathfrak{D}a_{n+t} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \mathfrak{D}a_m \cdot \theta(x;\, m, m) + \sum_{m=p+1}^{\infty} \mathfrak{D}a_m \cdot \theta(x;\, m, p).$$

Ma per la b) la seconda parte del secondo membro tende a zero per ogni x di $(0, 2\pi)$ fuori di I, mentre la prima parte rappresenta la somma parziale p^{ma} di una serie convergente assolutamente e uniformemente in ogni intervallo di $(0, 2\pi)$ non contenente punti I. Anche la (2) dunque converge in ogni punto di $(0, 2\pi)$ diverso dai punti I e, detta $f(x)$ la sua somma, si ha

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} \mathfrak{D}a_m \cdot \theta(x;\, m, m)$$

$$|f(x)| \leq \sum_{0}^{\infty} |\mathfrak{D}a_m| \cdot |\theta(x;\, m, m)|.$$

Ma essendo Δ un plurintervallo chiuso di $(0, 2\pi)$ formato di un numero finito di intervalli e non contenente punti I, si ha

$$\int_\Delta |f(x)|\,dx \leq \sum_{m=0}^{\infty} |\mathfrak{D}a_m| \int_0^{2\pi} |\theta(x,m,m)|\,dx < \sum_{m=0}^{\infty} |\mathfrak{D}a_m| \nu_m = C,$$

dove C non dipende da Δ. Epperciò la $f(x)$ è integrabile assolutamente in $(0, 2\pi)$. Per il teorema di DE LA VALLÉE POUSSIN l'asserto.

4. Gli esempi che ora do valgono per le serie di soli coseni.

Posto $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_n = 0$, $(n = 2, 3,...)$, si ha $\mathfrak{D}a_n = \Delta a_n$ e calcolando si ritrova il teorema di SZIDON. Analogamente posto $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_n = 0$, $(n = 3, 4,...)$, si ha $\mathfrak{D}a_n = \Delta^2 a_n$ e si ritrova il teorema di KOLMOGOROFF di cui il teorema di YOUNG è un caso particolare.

Più in generale, posto $\alpha_n = (-1)^n \binom{\sigma}{n}$, $\sigma > 0$, reale, si ha $\mathfrak{D}a_n = \Delta^\sigma a_n$, e allora, per $0 < \sigma < 1$, si trova la sufficienza delle condizioni

$$a_n \to 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\Delta^\sigma a_n| \text{ convergente,}$$

e, per $\sigma > 1$, si trova la sufficienza delle condizioni

$$a_n \to 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\Delta^\sigma a_n| \cdot n^{\sigma-1} \text{ convergente.}$$

Si veda per questi due casi il mio lavoro citato. Il teorema del n. 2 può dare però quante altre si vogliano condizioni sufficienti scegliendo come si voglia la successione α_n. Ne diamo qui alcuni casi elementari.

1°) Posto $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_n = 0$ $(n = 3, 4,...)$ si ha $\mathfrak{D}a_n = a_n + 2a_{n+1} + a_{n+2}$ e calcolando si trova la sufficienza delle condizioni

$$a_n \to 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\mathfrak{D}a_n| n \text{ convergente.}$$

2°) Posto $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pm 1$, $\alpha_n = 0$ $(n = 3, 4,...)$ si ha $\mathfrak{D}a_n = a_n \pm a_{n+2}$ e quindi la sufficienza delle condizioni

$$a_n \to 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\mathfrak{D}a_n| \lg n \text{ convergente.}$$

3°) Posto $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_n = 0$ $(n = 3, 4, \ldots)$ si ha $\mathfrak{D}a_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ e quindi la sufficienza delle condizioni

$$a_n \to 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\mathfrak{D}a_n| \lg n \text{ convergente.}$$

Come si vede si possono determinare quante si vogliano condizioni sufficienti manifestamente indipendenti dalle condizioni note. Analogamente anche per le serie di soli seni si possono nello stesso modo trovare altre utili condizioni sufficienti.