Bollettino Unione Matematica Italiana

Giovanni Ricci

Sui teoremi di Dirichlet e di Bertrand-Tchebychef relativi alla progressione aritmetica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.1, p. 7–17.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_1_7_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1934.

Sui teoremi di Dirichlet e di Bertrand-Tchebychef relativi alla progressione aritmetica.

Nota di GIOVANNI RICCI (a Pisa).

Sunto. - *Si dimostrano, senza ricorrere alla teoria dei caratteri (mod. a) e modificando un procedimento già usato in una piccola Nota precedente, due teoremi dei quali: il primo si accosta al classico teorema di* DIRICHLET *relativo all'esistenza di infiniti numeri primi nella progressione aritmetica* ax + b *con* (a, b) = 1 *(e nei casi particolari* a = 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 30 *dà lo stesso risultato del* DIRICHLET) *e il secondo si accosta al teorema di* BERTRAND-TCHEBYCHEF, *esteso alle progressioni aritmetiche, relativo all'esistenza di numeri primi in segmenti abbastanza ampî di tali progressioni (e nei casi particolari* a = 4, 6, 12 *perviene alla forma classica del* BERTRAND).

1. In una piccola Nota inserita nel precedente fascicolo di questo « Bollettino » [1] abbiamo dimostrato, senza ricorrere alla teoria dei caratteri (mod a), un teorema che si accosta al celebre teorema di DIRICHLET sugli interi primi contenuti nella progressione aritmetica $ax+b$ con $(a, b)=1$. Qui ci proponiamo di riprendere tale procedimento che, opportunamente modificato, ci condurrà alle due proposizioni seguenti delle quali: la prima dà un risultato più vantaggioso di quello contenuto nella piccola Nota citata (vedere ad es. i casi $a=8$ e $a=60$ ai n.i 2 e 3), e la seconda si accosta al classico teorema di BERTRAND–TCHEBYCHEF, sui numeri primi compresi fra x e $x(1+\varepsilon)$, esteso alle progressioni aritmetiche.

TEOREMA I. — Siano a, b interi con $a>0$ e $(a, b)=1$. Nella progressione aritmetica $a+b$, $2a+b$, $3a+b, \ldots$ esistono infiniti numeri della forma np, dove p è primo e n (primo con a) non supera il numero

$$\delta(a)=\frac{a}{\log a+\sum\limits_{p|a}\frac{\log p}{p-1}+\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k S_k}{a^{k-1}}}, \tag{1}$$

(1) Ved. G. RICCI, *Sul teorema di Dirichlet relativo alla progressione aritmetica,* « Bollettino U. M. I. », vol. XII (1933), pp. 304-309.

dove la somma $\sum_{p|a}$ si intende estesa a tutti i divisori primi p di a e

$$S_k = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots \qquad (k = 2, 3, 4, 5, \dots).$$

Inoltre il numero $N(\eta)$ degl'interi positivi $ax + b \leq \eta$ della forma np sopradetta ha l'ordine di grandezza di $\frac{\eta}{\log \eta}$, cioè

$$(2) \qquad N(\eta) = O\left(\frac{\eta}{\log \eta}\right), \quad \frac{\eta}{\log \eta} = O(N(\eta)) \qquad \text{per } \eta \to \infty.$$

OSSERVAZIONE. — Pei valori delle somme S_k abbiamo [1]

$$S_2 = 1{,}64493\dots, \quad S_3 = 1{,}20205\dots, \quad S_4 = 1{,}08232\dots,$$
$$S_5 = 1{,}03692\dots, \quad S_6 = 1{,}01734\dots, \dots$$

TEOREMA II. — Sia ε un numero reale con $0 < \varepsilon < 1$, e siano a, b interi con $a > 0$ e $(a, b) = 1$. Diciamo $B_\varepsilon(\xi)$ il numero degl'interi contenuti nel segmento di progressione aritmetica

$$a([(1 - \varepsilon)\xi] + 1) + b, \; a([(1 - \varepsilon)\xi] + 2) + b, \dots \; a[\xi] + b$$

aventi la forma np, con p primo e n (primo con a) non superiore al numero

$$(3) \qquad \beta(a, \varepsilon) = \frac{a}{\varepsilon\left(\log a + \sum_{p|a} \frac{\log p}{p - 1}\right) - \varepsilon \log \varepsilon - (1 - \varepsilon) \log (1 - \varepsilon)},$$

dove la somma $\sum_{p|a}$ si intende estesa a tutti i divisori primi p di a.

Per $\xi \to +\infty$ il numero $B_\varepsilon(\xi)$ ha l'ordine di grandezza di $\frac{\xi}{\log \xi}$, cioè

$$(4) \qquad B_\varepsilon(\xi) = O\left(\frac{\xi}{\log \xi}\right), \quad \frac{\xi}{\log \xi} = O(B_\varepsilon(\xi)).$$

Conseguenze del Teorema I.

2. In base alla (1) si verifica subito che è

$$\delta(8) < 3, \; \delta(12) < 4, \; \delta(18) < 5, \; \delta(30) < 6, \; \delta(60) < 11;$$

d'altronde si vede facilmente che assegnato l'intero c e la progressione aritmetica $ax + b$, con $(a, b) = 1$, esiste almeno un intero b_1, primo con ca, tale che la progressione aritmetica $cax + b_1$ risulta contenuta nella data. Si conclude:

[1] Ved. per esempio A. M. LEGENDRE, *Exercices de calcul intégral*, Paris 1817, t. 2, p. 65.

Il numero $N(\eta)$ degl'interi primi $\leqq \eta$ contenuti in ciascuna progressione aritmetica $ax + b$, dove $(a, b) = 1$ ed a è uno qualunque dei numeri

$$4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 15,\ 18,\ 30$$

ha l'ordine di grandezza di $\dfrac{\eta}{\log \eta}$.

In ogni progressione aritmetica $60x + b$, con $(60, b) = 1$, esistono infiniti interi di una almeno delle due forme p, $7p$.

3. Si vede facilmente (ved. piccola Nota citata) che:

Se $n_1 = 1, n_2, \ldots, n_r$ sono tutti gl'interi positivi non maggiori di $\delta(a)$ e primi con a, ed è $r > 1$, formiamo gli r loro prodotti ad $r-1$ ad $r-1$:

$$m_1 = n_2 n_3 \ldots n_r,\quad m_2 = n_1 n_2 \ldots n_r, \ldots,\quad m_r = n_1 n_2 \ldots n_{r-1};\quad (m_1 = n_i m_i).$$

Se $(a, b) = 1$, una almeno delle r progressioni aritmetiche

$$ax + m_1 b,\ ax + m_2 b, \ldots,\ ax + m_r b \qquad (x = 1, 2, 3, \ldots)$$

contiene infiniti numeri primi. Inoltre il numero complessivo degl'interi primi $\leqq \eta$ contenuti in esse ha l'ordine di grandezza $\dfrac{\eta}{\log \eta}$.

Si conclude: Se $(60, b) = 1$ una almeno delle due progressioni aritmetiche $60x + b$, $60x + 7b$ contiene infiniti numeri primi.

Conseguenze del teorema II.

4. In base alla (3) si verifica subito che è

$$\beta\left(6, \frac{1}{4}\right) < 5, \quad \beta\left(8, \frac{4}{5}\right) < 3, \quad \beta\left(12, \frac{1}{2}\right) < 5, \quad \beta\left(30, \frac{3}{4}\right) < 7$$

e si conclude:

Per ogni intero x maggiore di un conveniente ξ_0 (dipendente da b), in ciascun sistema di interi

$$\begin{array}{ll} 6(x+1)+b,\ 6(x+2)+b, \ldots,\ 6\left[\dfrac{4x}{3}\right]+b & (6, b) = 1 \\ 8(x+1)+b,\ 8(x+2)+b, \ldots,\ 8 \cdot 5x + b & (8, b) = 1 \\ 12(x+1)+b,\ 12(x+2)+b, \ldots,\ 12 \cdot 2x + b & (12, b) = 1 \\ 30(x+1)+b,\ 30(x+2)+b, \ldots,\ 30 \cdot 4x + b & (30, b) = 1 \end{array}$$

esiste almeno un numero primo.

5. Le dimostrazioni dei teoremi sopra enunciati si fondano sulle quattro formule seguenti [1]:

$$\text{(I)}\ \log([\xi]!) = \xi\log\xi - \xi + o(\xi); \qquad \text{(II)}\ \sum_{p\leqq\xi}\log p = \xi + o(\xi);$$

$$\text{(III)}\ \sum_{p\leqq\xi} 1 = \frac{\xi}{\log\xi} + o\left(\frac{\xi}{\log\xi}\right); \qquad \text{(IV)}\ \sum_{p\leqq\xi}\frac{\log p}{p-1} = \log\xi - C + o(1).$$

(C costante di EULER–MASCHERONI).

Dimostrazione del Teorema I.

6. Nel dimostrare il Teorema I ci imbatteremo nella serie $\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s(as+1)}$ che sostituiamo con un'altra più rapidamente convergente, e cioè:

$$(5) \qquad \sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s(as+1)} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k S_k}{a^{k-1}}, \qquad \left(S_k = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \ldots\right).$$

Infatti è

$$\frac{1}{s^k(as+1)} = \frac{1}{a}\left\{\frac{1}{s^{k+1}} - \left(\frac{1}{s^{k+1}} - \frac{1}{s^k\left(s+\frac{1}{a}\right)}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{a}\left\{\frac{1}{s^{k+1}} - \frac{1}{s^{k+1}(as+1)}\right\}$$

e facendo successivamente $k = 1, 2, 3, \ldots$ ne segue la (5), quando si tenga conto che $a > 1$ e quindi $\frac{S_k}{a^{k-1}} \to 0$ per $k \to +\infty$ [2].

7. La prima delle (2) è ovvia conseguenza della formula (III); quindi si tratta di dimostrare la seconda delle (2). Si può supporre senza alterare la generalità (dato il carattere asintotico del teorema)

[1] Ved. E. LANDAU, *Handbuch der Primzahlen*, p. 72, p. 195, p. 196, p. 200.

[2] Si noti che è

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s(as+1)} = \sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{a}}\right) = C + a + \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{a}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)},$$

ma preferiamo scrivere come in (5).

che sia $-a < b < 0$. Poniamo per $\xi > 1$

$$A(\xi) = (a + b)(2a + b) \dots ([\xi]a + b). \tag{6}$$

Essendo $A(\xi) > a \cdot 2a \cdot \dots \cdot [\xi - 1]a$, quindi $\log A(\xi) > [\xi - 1] \log a + \log ([\xi - 1]!)$, per la (I) si ricava subito

$$\log A(\xi) \geqq \xi \log \xi + (\log a - 1)\xi + o(\xi). \tag{7}$$

Ci proponiamo di determinare un' espressione maggiorante per $\log A(\xi)$.

8. Poniamo

$$\rho(r) = \sum_{s=1}^{r} \frac{1}{s(as+1)} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k S_k}{a^{k-1}} + \log r + C - \sum_{s=1}^{r} \frac{1}{s} + \log\left(1 + \frac{1}{ar}\right). \tag{8}$$

Poichè per $r \to +\infty$ è $\log\left(1 + \frac{1}{ar}\right) \to 0$, $\log r + C - \sum_{s=1}^{r} \frac{1}{s} \to 0$ e inoltre vale la (5), risulta anche $\rho(r) \to 0$; quindi si può determinare un intero r abbastanza grande in guisa che detto h il minimo intero primo con a e maggiore di $\delta(a)$, sia ancora (ved. la (1))

$$\frac{a}{\log a + \sum_{p|a} \frac{\log p}{p-1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k S_k}{a^{k-1}} + \rho(r)} < h. \tag{9}$$

Fissato così l' intero r, consideriamo l' espressione $A(\xi)$ data dalla (6) per ogni ξ che soddisfa alla condizione

$$\xi \geqq \frac{(ar+1)^2}{a}. \tag{10}$$

Denotando con $l(p)$ l' esponente della massima potenza di p che divide $A(\xi)$ abbiamo

$$\log A(\xi) = \sum_{p} l(p) \log p \tag{11}$$

e ci proponiamo di valutare $l(p)$.

9. Osserviamo che se p divide a non divide il prodotto $A(\xi)$; mentre se p non divide a, la classe di interi $a + b$, $2a + b, \dots, [\xi]a + b$ è periodica secondo $(\text{mod.}\, p^s)$ di periodo p^s, $(s \geqq 1)$; anzi, poichè p^s non divide alcun intero $ax + b$ per cui si abbia $0 < ax + b < p^s$,

possiamo considerare la detta classe di interi periodica secondo (mod. p^s) di periodo p^s, con un periodo che si inizia coll'intero

$$a\left(\left[\frac{p^s}{a}\right]+1\right)+b,$$

essendo stabilito che p^s non divide alcuno degl'interi ad esso precedenti.

Osserviamo inoltre che per ogni $p > \dfrac{a(\xi+1)}{ar+1}$ risulta per la (10)

$$p^2 > \frac{a^2(\xi+1)^2}{(ar+1)^2} > a\xi\cdot\frac{a\xi}{(ar+1)^2} \geqq a\xi > a[\xi]+b,$$

quindi per ogni $p > \dfrac{a\xi}{ar+1}$ nessun fattore di $A(\xi)$ è divisibile per p^2.

Distinguiamo vari casi:

1°) Se p divide a risulta $l(p)=0$.

2°) Se $p \leqq \dfrac{a(\xi+1)}{ar+1}$ e p non divide a, valutando i periodi (mod. p^s) nei fattori di $A(\xi)$ a partire dal fattore $a\left(\left[\dfrac{p^s}{a}\right]+1\right)+b$, e tenendo conto dell'eventuale parte di periodo rimanente alla fine, abbiamo

$$l(p) \leqq \left\{\left[\frac{1}{p}\left([\xi]-\left[\frac{p}{a}\right]\right)\right]+1\right\}+\left\{\left[\frac{1}{p^2}\left([\xi]-\left[\frac{p^2}{a}\right]\right)\right]+1\right\}+\dots$$
$$\dots+\left\{\left[\frac{1}{p^k}\left([\xi]-\left[\frac{p^k}{a}\right]\right)\right]+1\right\}$$

dove $k=k(p,\xi)$ è tale che $p^k \leqq a[\xi]+b < p^{k+1}$, cioè

$$k=k(p,\xi)=\left[\frac{\log(a[\xi]+b)}{\log p}\right]=\frac{\log\xi+O(1)}{\log p}.$$

Si semplifica subito come segue

$$l(p) \leqq (\xi+1)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\dots\right)+k\left(1-\frac{1}{a}\right),$$

cioè, essendo $\dfrac{1}{p-1}=\dfrac{\log p}{p-1}\cdot\dfrac{1}{\log p}=\dfrac{O(1)}{\log p}$, abbiamo in definitiva

$$l(p) \leqq \xi\frac{1}{p-1}+\left(1-\frac{1}{a}\right)\frac{\log\xi+O(1)}{\log p}. \tag{12}$$

3°) Se $\dfrac{a(\xi+1)}{as+1} < p \leqq \dfrac{a(\xi+1)}{a(s-1)+1}$ $(s=2,3,\dots,r)$, risulta, come abbiamo poco sopra osservato $p^2 > a[\xi] + b$; d'altronde il numero dei periodi completi secondo (mod. p) è $\left[\frac{1}{p}\left([\xi] - \left[\frac{p}{a}\right]\right)\right]$ e poichè

$$\frac{1}{p}\left([\xi] - \left[\frac{p}{a}\right]\right) < \frac{1}{p}\left(\xi - \frac{p}{a} + 1\right) = \frac{\xi + 1}{p} - \frac{1}{a} <$$
$$< \frac{(\xi + 1)(as + 1)}{a(\xi + 1)} - \frac{1}{a} = s$$

si conclude $\left[\frac{1}{p}\left([\xi] - \left[\frac{p}{a}\right]\right)\right] \leqq s - 1$, quindi in questo caso è $l(p) \leqq s$.

4°) Finalmente se $p > \frac{a(\xi + 1)}{a + 1}$, risulta $p^2 > a[\xi] + b$ e inoltre al più un solo fattore di $A(\xi)$ è divisibile per p: dunque $l(p) \leqq 1$.

Sia $\omega \geqq 1$ e denotiamo con $M_\omega(\xi)$ il numero dei divisori primi distinti del prodotto $A(\xi)$ tutti maggiori di $\omega\xi$. Per ciascuno di tali divisori primi risulta $l(p) = 1$ e $\log p = \log \xi + O(1)$.

10. In base alla (11) possiamo scrivere

$$\log A(\xi) = \sum_p l(p) \log p = \Sigma_0 + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_r + \Sigma_{r+1}, \tag{13}$$

dove le somme parziali Σ_i sono le seguenti e le calcoliamo colle formule (II), (III), (IV) del n. 5 e tenendo conto dei valori di $l(p)$ maggiorati al n. 9.

$$\sum\nolimits_0 = \sum_{p > \omega\xi} l(p) \log p = M_\omega(\xi) \{ \log \xi + O(1) \}$$

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{\frac{a(\xi+1)}{a+1} < p \leq \omega\xi} l(p) \log p \leqq \sum_{\frac{a(\xi+1)}{a+1} < p \leqq \omega\xi} \log p =$$
$$= \left(\omega - \frac{a}{a+1}\right)\xi + o(\xi)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum\nolimits_s &= \sum_{\frac{a(\xi+1)}{as+1} < p \leq \frac{a(\xi+1)}{a(s-1)+1}} l(p) \log p \leqq s \sum_{\frac{a(\xi+1)}{as+1} < p \leqq \frac{a(\xi+1)}{a(s-1)+1}} \log p = \\ &= s\left(\frac{a}{a(s-1)+1} - \frac{a}{as+1}\right)\xi + o(\xi), \quad (s = 2, 3, \dots r) \end{aligned} \right.$$

$$\sum\nolimits_{r+1} = \sum_{p \leqq \frac{a(\xi+1)}{ar+1}} l(p) \log p \leqq$$

$$\leqq \left\{ \sum_{p \leqq \frac{a(\xi+1)}{ar+1}} \frac{\log p}{p-1} - \sum_{p/a} \frac{\log p}{p-1} \right\} \xi +$$

$$+\left(1-\frac{1}{a}\right)(\log\xi+O(1))\left\{\sum_{p\leq\frac{a(\xi+1)}{ar+1}}1-\sum_{p/a}1\right\}=$$

$$=\xi\log\xi+\left\{-\log r-\log\left(1-\frac{1}{ar}\right)-C-\sum_{p/a}\frac{\log p}{p-1}+\frac{a-1}{ar+1}\right\}\xi+o(\xi).$$

Osservando che è

$$-\frac{a}{a+1}+\sum_{s=2}^{r}s\left(\frac{a}{a(s-1)+1}-\frac{a}{as+1}\right)+$$

$$+\frac{a-1}{ar+1}=-1+\sum_{s=1}^{r}\frac{1}{s}-\sum_{s=1}^{r}\frac{1}{s(as+1)},$$

otteniamo per la (13), tenendo anche conto della posizione (8):

$$\log A(\xi)\leq M_\omega(\xi)\{\log\xi+O(1)\}+\xi\log\xi+$$

$$+\left\{\omega-1-\rho(r)-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^kS_k}{a^{k-1}}-\sum_{p/a}\frac{\log p}{p-1}\right\}\xi+o(\xi),$$

e confrontando questa con la (7) otteniamo in definitiva

$$M_\omega(\xi)\geq\left\{\log a+\sum_{p/a}\frac{\log p}{p-1}+\right. \tag{14}$$

$$\left.+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^kS_k}{a^{k-1}}+\rho(r)-\omega\right\}\frac{\xi}{\log\xi}+o\left(\frac{\xi}{\log\xi}\right).$$

11. Scegliamo adesso ω, fin qui rimasto in nostro arbitrio, in guisa che sia

$$\log a+\sum_{p/a}\frac{\log p}{p-1}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^kS_k}{a^{k-1}}+\rho(r)>\omega>\frac{a}{h}, \tag{15}$$

e questo è possibile per la (9). Allora per la (14) avremo

$$\frac{\xi}{\log\xi}=O(M_\omega(\xi)). \tag{16}$$

12. Per ogni fattore $ax+b$ del prodotto $A(\xi)$ risulta (essendo $b<0$)

$$\frac{ax+b}{\omega\xi}\leq\frac{a[\xi]+b}{\omega\xi}\leq\frac{a\xi+b}{\omega\xi}<\frac{a}{\omega}+\frac{b}{\omega\xi}<\frac{a}{\omega}<h$$

e si conclude che ad ogni fattore primo di $A(\xi)$ computato in $M_\omega(\xi)$

(e quindi maggiore di $\omega\xi$) corrisponde un termine della progressione aritmetica $ax+b$ avente la forma np con

$$p > \omega\xi, \quad n < h, \quad (n, a) = 1,$$

e quindi anche $n \leqq \delta(a)$.

Ricordando il significato di $N(\eta)$ che figura nell'enunciato, si conclude che non appena ξ soddisfa alla (10), cioè $\xi \geqq \frac{(ar+1)^2}{a}$, vale la limitazione $N(a[\xi]+b) \geqq M_\omega(\xi)$, e valendo le (15), per la (16) risulta

$$\frac{\xi}{\log \xi} = O(N(a[\xi]+b))$$

e quindi anche la seconda delle (2). Il Teorema I risulta così dimostrato.

Dimostrazione del Teorema II.

13. La dimostrazione del Teorema II procede in modo analogo a quella del Teorema I; esporremo quella succintamente facendo via via ricorso ai passi analoghi di questa.

Supponiamo anche qui, senza alterare la generalità, $-a < b < 0$, e poniamo per $\xi \geqq \frac{1}{\varepsilon}$

$$A_\varepsilon(\xi) = \prod_{(1-\varepsilon)\xi < t \leq \xi} (at+b). \tag{17}$$

Essendo $A_\varepsilon(\xi) > \{[(1-\varepsilon)\xi]+1\}a \cdot \{[(1-\varepsilon)\xi]+2\}a \cdot \ldots \cdot \{[\xi]-1\}a$ si ricava subito per la (I) (ved. n.i 5, 7)

$$\log A_\varepsilon(\xi) \geqq \varepsilon\xi \log \xi + \{\varepsilon(\log a - 1) - (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon)\}\xi + o(\xi) \tag{18}$$

e allora cerchiamo un'espressione maggiorante per $\log A_\varepsilon(\xi)$.

14. Posto $\rho(r) = \log r + C - \sum_{s=1}^{r} \frac{1}{s}$, risulta $\rho(r) \to 0$, per $r \to +\infty$; quindi, detto h il minimo intero positivo primo con a e maggiore di $\beta(a, \varepsilon)$, è possibile determinare un intero r per cui sia ancora:

$$\frac{a}{\varepsilon\left(\log a + \sum_{p|a} \frac{\log p}{p-1} + \rho(r)\right) - \varepsilon \log \varepsilon - (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon)} < h. \tag{19}$$

Fissato così r, scegliamo ξ in guisa da avere $\xi \geqq \frac{ar^2}{\varepsilon^2}$. Denotando con $l(p)$ l'esponente della massima potenza di p che divide $A_\varepsilon(\xi)$ risulta

$$\log A_\varepsilon(\xi) = \sum_p l(p) \log p. \tag{20}$$

15. Come al n. 9 si arriva alle conclusioni seguenti

1°) Se p divide a risulta $l(p)=0$.

2°) Se $p \leqq \frac{\varepsilon\xi}{p}$ e p non divide a abbiamo

$$l(p) \leqq \left(\left[\frac{\varepsilon\xi}{p}\right]+1\right)+\left(\left[\frac{\varepsilon\xi}{p^2}\right]+1\right)+\ldots+\left(\left[\frac{\varepsilon\xi}{p^k}\right]+1\right)$$

dove

$$k=\left[\frac{\log(a[\xi]+b)}{\log p}\right]=\frac{\log\xi+O(1)}{\log p}$$

e in definitiva risulta

$$l(p) \leqq \varepsilon\xi\,\frac{1}{p-1}+\frac{\log\xi+O(1)}{\log p}.$$

3°) Se $\frac{\varepsilon\xi}{s}<p \leqq \frac{\varepsilon\xi}{s-1}$ $(s=2,3,\ldots,r)$ è anche $p^2>\frac{\varepsilon^2\xi^2}{s^2} \geqq \frac{\varepsilon^2\xi^2}{r^2}>$ $>a[\xi]+b$ dunque $l(p) \leqq s$.

4°) Se $p>\varepsilon\xi$ è anche $p^2>a[\xi]+b$ dunque $l(p) \leqq 1$.

Sia $\omega>\varepsilon$ e denotiamo con $M'_\omega(\xi)$ il numero dei divisori primi distinti del prodotto $A_\varepsilon(\xi)$ tutti maggiori di $\omega\xi$. Per ciascuno di tali divisori primi risulta $l(p)=1$ e $\log p=\log\xi+O(1)$.

16. Per la (20) si può scrivere

$$\log A_\varepsilon(\xi)=\sum_p l(p)\log p=\Sigma_0+\Sigma_1+\Sigma_2+\ldots+\Sigma_r+\Sigma_{r+1} \tag{21}$$

dove

$$\sum\nolimits_0=\sum_{p>\omega\xi} l(p)\log p=M'_\omega(\xi)\{\log\xi+O(1)\}$$

$$\sum\nolimits_1=\sum_{\varepsilon\xi<p\leqq\omega\xi} l(p)\log p \leqq \sum_{\varepsilon\xi<p\leqq\omega\xi}\log p=(\omega-\varepsilon)\xi+o(\xi)$$

$$\left\{\begin{aligned}\sum\nolimits_s&=\sum_{\frac{\varepsilon\xi}{s}<p\leqq\frac{\varepsilon\xi}{s-1}} l(p)\log p \leqq s\sum_{\frac{\varepsilon\xi}{s}<p\leqq\frac{\varepsilon\xi}{s-1}}\log p=\\&=s\varepsilon\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right)\xi+o(\xi)\qquad(s=2,3,\ldots,r)\end{aligned}\right.$$

$$\sum\nolimits_{r+1}=\sum_{p\leqq\frac{\varepsilon\xi}{r}} l(p)\log p \leqq$$

$$\leqq \varepsilon\xi\left\{\sum_{p\leqq\frac{\varepsilon\xi}{r}}\frac{\log p}{p-1}-\sum_{p/a}\frac{\log p}{p-1}\right\}+\{\log\xi+O(1)\}\left\{\sum_{p\leqq\frac{\varepsilon\xi}{r}}1-\sum_{p/a}1\right\}=$$

$$=\varepsilon\xi\log\xi+\left\{\log\varepsilon-\log r-C-\sum_{p/a}\frac{\log p}{p-1}+\frac{1}{r}\right\}\varepsilon\xi+o(\xi).$$

Introducendo questi valori nell'uguaglianza (21) col tener conto del significato di $\rho(r)$, otteniamo un'espressione maggiorante per $\log A_\varepsilon(\xi)$, la quale confrontata con la (18) conduce alla limitazione

$$(22)\qquad M'_\omega(\xi) \geqq \left\{ \left(\log a + \sum_{p/a} \frac{\log p}{p-1} + \rho(r) \right) \varepsilon - \right.$$

$$\left. - \varepsilon \log \varepsilon - (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon) - \omega \right\} \frac{\xi}{\log \xi} + o\left(\frac{\xi}{\log \xi}\right).$$

17. Scelto ω in guisa che sia

$$\left\{ \log a + \sum_{p/a} \frac{\log p}{p-1} + \rho(r) \right\} \varepsilon - \varepsilon \log \varepsilon - (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon) > \omega > \frac{a}{h}$$

risulta dalla (22)

$$\frac{\xi}{\log \xi} = O(M'_\omega(\xi))$$

e la dimostrazione del Teorema II si completa proprio come fu fatto al n. 12 per quella del Teorema I.

NOTA (aggiunta alle bozze di stampa). — In seguito alla pubblicazione in questo « Bollettino » della mia piccola Nota citata, e dopo che anche questa era ormai presentata, il sig. PAUL ERDÖS di Budapest mi spediva, con lettera del 13 gennaio u. s., il manoscritto di un suo lavoro, *Ueber die Primzahlen gewisser arithmetischer Reihen*. Questo suo lavoro, presentato fin dal settembre 1932 alla Redazione dei « Mathematische Zeitschrift », sarà pubblicato prossimamente in quel Periodico. Mi è grato qui segnalare la natura assolutamente elementare dei mezzi impiegati dal sig. PAUL ERDÖS e i risultati da lui conseguiti su questo argomento.