Bollettino
Unione Matematica
Italiana

S. P. Slouguinoff

La méthode symbolique de Buhl

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.1, p. 54–58.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_1_54_0>

La méthode symbolique de Buhl

par S. P. SLOUGUINOFF (à Perm).

Définitions. — Dans sa note I: *Multiplication et dérivation extérieures* (1), le professeur A. BUHL a donné une méthode intéressante, nommé par lui la *multiplication extérieure.* L'idée de cette méthode a été empruntée par BUHL à E. CARTAN et H. GRASSMANN.

Le but du présent article est de donner le développement complet de cette méthode pour la transformation de variables dans les intégrales multiples.

Considérons un rectangle euclidien infiniment petit $ABCDA$ et un système de coordonnées OXY. Les côtés $AB = dx$ et $BC = dy$,

(1) P. BARBARIN, *La Géometrié non euclidienne,* suivie de notes A. BUHL. Paris, Gauthier-Villars, 1928.

parcourus dans les sens OX et OY, seront positifs. Mais deux autres côtés CD et DA seront négatifs.

On a symboliquement pour l'aire de ce rectangle

$$[dxdy] = -[dydx]. \tag{1}$$

Le symbole $[dxdy]$ est celui de la *multiplication extérieure.* Nous voyons, que la *multiplication extérieure* n'est pas commutative.

D'une façon analogue nous avons

$$[dxdydz] = -[dydxdz] = [dydzdx] = \ldots \tag{2}$$

où $dxdydz$ est le volume d'un parallélépipède infiment petit.

Et en général un *produit extérieur*

$$[dx_1 dx_2 \ldots dx_n] \tag{3}$$

changera de signe toutes les fois qu'on y intervertira deux facteurs consécutifs. Si dans la formule (1) on pose $dy = dx$, on a

$$[dx^2] = -[dx^2], \quad \text{d'où} \quad [dx^2] = 0. \tag{4}$$

Et en général

$$[dx^k] = 0 \quad \text{où} \quad k \geq 2. \tag{5}$$

Transformation de variables dans les intégrales multiples. — La notation symbolique de Buhl simplifie considérablement les calculs dans la théorie des intégrales multiples.

Intégrales doubles. — Considérons l'intégrale double

$$\iint\limits_A z dxdy \tag{6}$$

où A est un domaine d'intégration et $z = z(x, y)$.

Conformément aux notations de Buhl, on peut aussi donner à l'intégrale (6) la forme suivante

$$\iint\limits_A z[dxdy]. \tag{6'}$$

Soit maintenant

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v). \tag{7}$$

Dans tel cas une aire A du plan des x, y se remplacera par l'aire B du plan des u, v.

On a

$$dx = x_u' du + x_v' dv, \quad dy = y_u' du + y_v' dv. \tag{8}$$

En appliquant la *multiplication extérieure*, on peut écrire

$$[dxdy] = x_u' y_u' [du^2] + x_v' y_u' [dvdu] + x_u' y_v' [dudv] + x_v' y_v' [dv^2].$$

Mais

$$[du^2] = 0,\ [dv^2] = 0 \quad \text{et} \quad [dvdu] = -[dudv].$$

Donc

(9) $$[dxdy] = (x_u' y_v' - x_v' y_u')[dudv] = \begin{vmatrix} x_u' & x_v' \\ y_u' & y_v' \end{vmatrix} [dudv].$$

Par conséquent

(10) $$\iint_A z[dxdy] = \iint_B \bar{z} J [dudv],$$

où $\bar{z}$ est la fonction continue de variables u et v et J est le jacobien

$$J = \begin{vmatrix} x_u' & x_v' \\ y_u' & y_v' \end{vmatrix}.$$

Intégrales triples. — Passons maintenant au cas d'une intégrale triple. On a

$$\iiint_D f(x, y, z) dxdydz$$

ou aussi

(11) $$\iiint_D f(x, y, z)[dxdydz],$$

où D est un domaine (champ) d'intégration de l'intégrale triple; en particulier, un domaine d'intégration est un volume, limité dans tous les sens. Proposons nous d'exprimer notre intégrale en fonction de nouvelles variables u, v, w, liées aux premières par les relations

(12) $$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w).$$

Nous supposons, comme toujours, que ces trois fonctions sont continues et admettent des dérivées partielles continues du premier ordre dans un domaine considéré (par exemple, un volume U). Bien entendu la fonction $f(x, y, z)$ est aussi continue. On suppose que les trois équations (12) établissent une correspondance uniforme entre un volume V rapporté aux axes (x, y, z) et un volume U rapporté à des axes (u, v, w).

Les équations (12) nous donnent

(13) $$dx = x_u' du + x_v' dv + x_w' dw, \quad dy = y_u' du + y_v' dv + y_w' dw,$$
$$dz = z_u' du + z_v' dv + z_w' dw.$$

En appliquant la *multiplication extérieure*, on trouve

(14) $[dxdydz] = \Sigma x_p' y_p' z_p' [dp^3] + \Sigma x_p' y_p' z_q' [dp^2 dq] + \Sigma x_p y_q z_r [dpdqdr]$,

où $p = u, v, w$; $q = u, v, w$ et $r = u, v, w$.

Il est facile de voir que dans la formule (14) le premier membre $\Sigma x_p' y_p' z_p' [dp^3]$ contient 3 termes; le second 18 termes et troisième 6 termes.

Or on a

$$[dp^3] = 0 \quad \text{et} \quad [dp^2 dq] = 0.$$

Donc

(14') $$[dxdydz] = \Sigma x_p' y_q' z_r' [dpdqdr]$$

ou

(15) $$\begin{aligned}[dxdydz] &= x_u' y_v' z_w' [dudvdw] + x_v' y_u' z_w' [dvdudw] + x_w' y_u' z_v' [dwdudv] + \\ &+ x_w' y_v' z_u' [dwdvdu] + x_u' y_w' z_v' [dudwdv] + x_v' y_w' z_u' [dvdwdu] = \\ &= \{ x_u'(y_v' z_w' - y_w' z_v') + x_v'(y_w' z_u' - y_u' z_w') + x_w'(y_u' z_v' - y_v' z_u) \} [dudvdw] = \\ &= \begin{vmatrix} x_u' & x_v' & x_w' \\ y_u' & y_v' & y_w' \\ z_u' & z_v' & z_w' \end{vmatrix} [dudvdw].\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi la formule suivante

(16) $$\iiint_V f(x, y, z)[dxdydz] = \iiint_U f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) J [dudvdw],$$

où $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ est fonction des variables u, v, w et J est le jacobien

$$J = \begin{vmatrix} x_u' & x_v' & x_w' \\ y_u' & y_v' & y_w' \\ z_u' & z_v' & z_w' \end{vmatrix}.$$

Intégrales quadruples. — La méthode précédente s'étend à un nombre quelconque de variables indépendantes, mais il suffira de se borner au cas de 4 variables, car le développement de nos calculs dans le cas d'un nombre plus grand devient entièrement clair. Considérons enfin l'intégrale quadruple

(17) $$\iiiint_D f(x, y, z, t)[dxdydzdt].$$

Prenons les formules de transformation

(18) $x = x(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $y = y(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $z = z(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $t = t(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

On a

$$(19)\qquad \begin{cases} dx = x_\alpha' d\alpha + x_\beta' d\beta + x_\gamma' d\gamma + x_\delta' d\delta, \\ dy = y_\alpha' d\alpha + y_\beta' d\beta + y_\gamma' d\gamma + y_\delta' d\delta, \\ dz = z_\alpha' d\alpha + z_\beta' d\beta + z_\gamma' d\gamma + z_\delta' d\delta, \\ dt = t_\alpha' d\alpha + t_\beta' d\beta + t_\gamma' d\gamma + t_\delta' d\delta. \end{cases}$$

En multipliant ces égalités symboliquement, on obtient

$$(20)\qquad [dxdydzdt] = \Sigma x_p' y_p' z_p' t_p' [dp^4] + \Sigma x_p' y_p' z_p' t_q' [dp^3 dq] + \\ + \Sigma x_p' y_p' z_p' t_q' [dp^2 dq^2] + \Sigma x_p' y_p' z_q' t_r' [dp^2 dq dr] + \Sigma x_p' y_q' z_r' t_s' [dp dq dr ds],$$

où $p = \alpha, \beta, \gamma, \delta$; $q = \alpha, \beta, \gamma, \delta$; $r = \alpha, \beta, \gamma, \delta$ et $s = \alpha, \beta, \gamma, \delta$.

La formule (20) contient en tout $4 + 48 + 36 + 144 + 24 = 256$ termes. Comme résultat de simplifications, nous aurons

$$(20')\qquad [dxdydzdt] = \Sigma x_p' y_q' z_r' t_s' [dp dq dr ds]$$

ou

$$(21)\qquad [dxdydzdt] = \begin{vmatrix} x_\alpha' & x_\beta' & x_\gamma' & x_\delta' \\ y_\alpha' & y_\beta' & y_\gamma' & y_\delta' \\ z_\alpha' & z_\beta' & z_\gamma' & z_\delta' \\ t_\alpha' & t_\beta' & t_\gamma' & t_\delta' \end{vmatrix} [d\alpha d\beta d\gamma d\delta].$$

Par conséqueut

$$(22)\qquad \iiiint\limits_D f(x, y, z, t)[dxdydzdt] = \iiiint\limits_{D'} f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) J [d\alpha d\beta d\gamma d\delta],$$

où les symboles ont le sens précédent.