
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARIA MASCALCHI

Un nuovo invariante proiettivo di contatto di due superficie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **13** (1934), n.1, p. 45–49.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_1_45_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_1_45_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1934.

**Un nuovo invariante proiettivo di contatto
di due superficie.**

Nota di MARIA MASCALCHI (a Torino).

Sunto. - *Si cercano certi invarianti proiettivi di due superficie qualsiansi, aventi in un punto, semplice per entrambe, lo stesso piano tangente.*

Nella presente Nota mi sono occupata, sotto la guida del prof. B. SEGRE, della ricerca di certi invarianti proiettivi di due superficie qualsiansi, aventi in un punto — semplice per entrambe — lo stesso piano tangente. Il caso analogo, per due curve piane,

trovasi in una nota di CORRADO SEGRE ⁽¹⁾ ed anche in una di BENIAMINO SEGRE ⁽²⁾.

Uno degli invarianti a cui qui giungeremo, è già stato assegnato dal MEHMKE ⁽³⁾, senza giustificazione.

1. Se due superficie F_1 e F_2 hanno in un punto semplice comune O lo stesso piano tangente, scegliendo O come origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali e come piano $z=0$ il relativo piano tangente, esse vengon rappresentate, nell'intorno di O , da equazioni del tipo:

$$z = a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + \varphi_1(x, y)$$

$$z = a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 + \varphi_2(x, y),$$

φ_1 e φ_2 essendo funzioni di x e y contenenti solo termini di grado superiore al secondo. Le equazioni

$$(1) \quad a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 = 0$$

$$(2) \quad a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 = 0$$

rappresentano, nel piano $z=0$, le coppie di tangenti tripunte in O alle curve intersezioni di questo piano con F_1 e F_2 , ossia le coppie di tangenti asintotiche in O alle due superficie. La equazione

$$(3) \quad (a_1 - a_2)x^2 + 2(b_1 - b_2)xy + (c_1 - c_2)y^2 = 0$$

rappresenta, nel piano $z=0$, la coppia di tangenti tripunte nel punto doppio O alla curva intersezione di F_1 e F_2 .

Le coppie di rette (1), (2), (3) appartengono evidentemente ad una involuzione; e, se si effettua una trasformazione proiettiva, si muteranno in tre coppie di rette ancora in involuzione. Sarà invariante il birapporto delle coppie (1), (2) e quello delle coppie (2), (3). Il birapporto delle coppie (1), (3) sarà pure invariante, ma risulterà funzione dei precedenti, non essendo le equazioni (1), (2), (3) linearmente indipendenti. E così ogni loro altro invariante sarà funzione dei precedenti. Quindi:

Esistono due soli invarianti proiettivi indipendenti di contatto di due superficie, relativi ai loro intorni del 2° ordine.

2. Per trovare una interpretazione geometrica semplice per i due invarianti, procediamo al calcolo nel modo seguente.

(1) « Atti Lincei », serie V, t. 9 (1897)₂, pag. 168.

(2) « Atti Lincei », serie VI, t. 9 (1929), pag. 970; in questo lavoro trovansi altre citazioni sull'argomento.

(3) « Zeitschr. für Math. u. Phys. », t. 36 (1891), pagg. 56-60 e 206-213.

Le equazioni (1) e (2) ammettono, com'è noto dalla teoria delle forme binarie, un unico *invariante assoluto*: il risultante delle due equazioni diviso per il prodotto dei due discriminanti. Il risultante è

$$\begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & a_1 & 2b_1 & c_1 \\ a_2 & 2b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_2 & 2b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (a_2c_1 + a_1c_2 - 2b_1b_2)^2 - 4(b_1^2 - a_1c_1)(b_2^2 - a_2c_2).$$

Dalle precedenti equazioni si ricava immediatamente, indicando con D_1 e D_2 i *discriminanti* delle equazioni (1) e (2), con T_1 e T_2 le *curvature totali* in O di F_1 e F_2 , e con M_1 e M_2 le analoghe *curvature medie*.

$$\begin{aligned} D_1 &= 4(b_1^2 - a_1c_1), & T_1 &= 4(a_1c_1 - b_1^2), & M_1 &= a_1 + c_1 \\ D_2 &= 4(b_2^2 - a_2c_2), & T_2 &= 4(a_2c_2 - b_2^2), & M_2 &= a_2 + c_2; \end{aligned}$$

denotiamo inoltre con

$$R = 2(a_2c_1 + a_1c_2 - 2b_1b_2)$$

l'*armonizzante* delle (1), (2). Allora l'*invariante cercato* è

$$\frac{1}{4} \left(\frac{R^2}{D_1D_2} - 1 \right),$$

onde sarà pure invariante:

$$\frac{R^2}{D_1D_2} = \frac{R^2}{T_1T_2}.$$

Per trovare l'altro invariante, basterà in quanto precede cambiare a_1, b_1, c_1 in $a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2$. Con ciò l'espressione R diviene

$$2[c_2(a_1 - a_2) + a_2(c_1 - c_2) - 2b_2(b_1 - b_2)] = R - T_2,$$

e l'espressione D_1 diviene

$$4[(b_1 - b_2)^2 - (a_1 - a_2)(c_1 - c_2)] = 2R - (T_1 + T_2).$$

Sono pertanto invarianti

$$\frac{R^2}{T_1T_2} \quad \text{e} \quad \frac{(R - T_2)^2}{(T_1 + T_2 - 2R)T_2}$$

e quindi anche

$$\frac{(R - T_2)^2}{(T_1 + T_2 - 2R)T_2 - (R - T_2)^2} = \frac{(R - T_2)^2}{T_1T_2 - R^2} = \frac{\left(1 - \frac{T_2}{R}\right)^2}{\frac{T_1T_2}{R^2} - 1}.$$

Dunque, essendo invariante $\frac{T_1T_2}{R^2}$ lo saranno altresì $\frac{T_2}{R}$ e $\frac{T_1}{T_2}$ e si ha intanto che:

Il rapporto delle curvatures totali di due superficie in un loro punto semplice di contatto è invariante per trasformazioni proiettive ⁽¹⁾.

Consideriamo ora gli angoli δ_1 e δ_2 delle due tangenti (3) con l'asse x e l'angolo ω delle due stesse tangenti; è:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \omega &= \operatorname{tg}^2 (\delta_2 - \delta_1) = \frac{(\operatorname{tg} \delta_1 + \operatorname{tg} \delta_2)^2 - 4 \operatorname{tg} \delta_1 \operatorname{tg} \delta_2}{(1 + \operatorname{tg} \delta_1 \operatorname{tg} \delta_2)^2} = \\ &= 4 \frac{(b_1 - b_2)^2 - (a_1 - a_2)(c_1 - c_2)}{[(c_1 - c_2) - (a_1 - a_2)]^2} = \frac{2R - (T_1 + T_2)}{(M_1 - M_2)^2}, \end{aligned}$$

donde

$$\frac{(M_1 - M_2)^2 \operatorname{tg}^2 \omega}{T_1 + T_2} = 2 \frac{R}{T_1 + T_2} - 1$$

ma $\frac{R}{T_1}$ e $\frac{R}{T_2}$ sono invarianti, quindi lo è anche $\frac{R}{T_1 + T_2}$ e perciò $\frac{(M_1 - M_2)^2 \operatorname{tg}^2 \omega}{T_1 + T_2}$. Si conclude che:

Il prodotto del quadrato della differenza delle curvatures medie di due superficie tangenti in un punto, per il quadrato della tangente trigonometrica dell'angolo delle tangenti alla loro curva d'intersezione nel punto di contatto, diviso per la somma delle curvatures totali delle due superficie in quel punto, è invariante per trasformazioni proiettive.

3. Deduciamo dall'invarianza di $I = \frac{(M_1 - M_2)^2 \operatorname{tg}^2 \omega}{T_1 + T_2}$ alcune proprietà.

1°) Sia $M_1 = M_2$; allora l'invariante I assume forma indeterminata, perchè in pari tempo risulta $\operatorname{tg} \omega = \infty$. Ed inverso, essendo in tal caso $a_1 + c_1 = a_2 + c_2$, $a_1 - a_2 = -(c_1 - c_2)$, le radici della (3) considerata come equazione in $\frac{y}{x}$ (coefficiente angolare delle due rette) sono reciproche ed opposte, onde le due rette rappresentate dalla (3) sono fra loro normali. Viceversa, se le rette sono normali, segue $M_1 = M_2$, e pertanto:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè due superficie tangenti in un punto abbiano in quel punto eguali le curvatures medie, è che siano tra loro normali le tangenti alla curva intersezione di esse nel punto considerato.

Il calcolo di I , in questo caso, si potrà fare determinandone il

⁽¹⁾ Vedi MEHMKE, lavori citati.

valore dopo effettuata una generica trasformazione proiettiva, non essendo nè $\frac{M_1}{M_2}$ nè $\text{tg } \omega$ invarianti.

Se una delle due superficie è un piano, dalla proposizione precedente si ha in particolare il fatto noto che *l'annullarsi della curvatura media di una superficie in un punto, equivale alla ortogonalità delle relative tangenti asintotiche*.

2°) Può dunque essere $I = 0$ solo se è $\text{tg } \omega = 0$, ossia *l'annullarsi dell'invariante I esprime la condizione necessaria e sufficiente affinchè il contatto fra le due superficie sia stazionario*.

3°) Parimenti risulta $I = \infty$ se si annulla $T_1 + T_2$ ed in tal caso soltanto: dunque *l'invariante I diventa infinito, se e solo se le due superficie hanno nel loro punto di contatto curvature totali eguali in valore assoluto, ma di segni opposti* (nel qual caso l'invariante proiettivo di MEHMKE assume il valore -1).

Se le coppie di rette (1), (2) hanno una retta comune o coincidono, il risultante delle due equazioni (1), (2), si annulla, quindi è

$$R^2 = T_1 T_2$$

e i due invarianti ottenuti nel caso generale si riducono al solo invariante di MEHMKE.