
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARGHERITA PIAZZOLLA-BELOCH

Sul problema fondamentale dell'aero-fotogrammetria

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **13** (1934), n.1, p. 42–45.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_1_42_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_1_42_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sul problema fondamentale dell'aero-fotogrammetria ⁽¹⁾.

Nota di M. PIAZZOLLA-BELOCH (a Ferrara).

Sunto. - *L'A. risolve il problema fondamentale della fotogrammetria aerea (determinazione del punto di presa d'una data fotografia) mediante sole equazioni di 1° e 2° grado (graficamente cioè con riga e compasso) nel caso particolare in cui siano dati due punti del terreno ed una direzione, caso di speciale importanza pratica.*

1. Il problema fondamentale della fotogrammetria aerea consiste nella determinazione del punto di presa relativo ad una fotografia eseguita (in posizione comunque inclinata) da bordo di un velivolo in volo, supposti dati tre punti del terreno, di cui sulla fotografia siano visibili le immagini.

La soluzione teorica del problema, così posto, conduce ad una equazione di 4° grado ⁽²⁾, che in tutti i metodi all'uopo proposti dà luogo a calcoli lunghi e laboriosi ⁽³⁾. Altrettanto laboriosi, anche se di esecuzione più semplice, sono i metodi di risoluzione del problema ricorrendo a procedimenti di approssimazioni successive partendo da valori approssimativi delle coordinate del punto di presa.

Ora io, nel caso particolare in cui invece di tre punti fissi siano dati due punti ed una direzione, risolvo il problema con sole equazioni di 1° e 2° grado ⁽⁴⁾. Il caso particolare che tratto ha speciale importanza pratica, perchè come direzione fissa si può prendere quella dei raggi solari all'istante dell'esecuzione della fotografia, direzione che si può determinare fotografando insieme con la zona di terreno, con opportuni dispositivi, il sole e un orologio (procedimento SANTONI) ⁽⁵⁾.

⁽¹⁾ Sunto di una comunicazione fatta alla XXII Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze (Bari, 1933-XI).

⁽²⁾ Ved. S. FINSTERWALDER, *Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie* (« Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung », VI₃, 1897).

⁽³⁾ Ved. p. es. F. J. MÜLLER, *Direkte (exakte) Lösung des einfachen Rückwärtseinschneidens im Raume* (« Allgemeine Vermessungsnachrichten », 1925).

⁽⁴⁾ Per le relative risoluzioni grafiche (con riga e compasso), da me date, ved. i miei *Elementi di Fotogrammetria terrestre ed aerea* (Padova, Cedam, 1933), dove determino anche tutti gli altri elementi dell'orientazione esterna della fotografia.

⁽⁵⁾ E. SANTONI, *Dalla fotogrammetria terrestre alla fotogrammetria aerea* (« L'Universo », 1930).

2. Sia O il punto di presa incognito; L, M i due punti fissi (dati); L_0, M_0 le loro proiezioni ortogonali sul piano di stazione; h_1 e h_2 rispettivamente le quote di L e M rispetto al piano di stazione ($h_1 \leq h_2$). Sia poi s la retta condotta per O parallelamente alla direzione data. (Si suppone che questa direzione non sia orizzontale).

Supposto di aver fissato sulla retta s l'orientamento positivo p. es. dall'alto verso il basso, e di aver preso sulla retta LM l'orientamento positivo p. es. da M verso L , chiamo ψ l'angolo delle due rette così orientate (angolo noto).

Della data fotografia si suppone nota l'orientazione *interna* (intrinseca), ossia punto principale, assi fotogrammetrici e distanza ⁽¹⁾.

Chiamo poi α l'angolo \widehat{LOM} ; β e γ rispettivamente gli angoli che la retta orientata s forma con le semirette OL e OM , angoli che si possono supporre noti, potendosi ricavare dai dati forniti dalla fotografia (essendone data per ipotesi l'orientazione interna).

Indico con a la distanza LM (nota); con a_0 quella L_0M_0 (pure nota) e con l, m rispettivamente i segmenti (incogniti) OL e OM ; (segmenti presi tutti in valore assoluto).

Ciò posto conduco per L e per M i piani ortogonali alla direzione fissa e siano S_1 e S_2 rispettivamente i punti d'incontro di questi piani con la retta s .

Dal triangolo OLM si ha

$$(1) \quad a^2 = l^2 + m^2 - 2lm \cos \alpha$$

e sulla retta s

$$(2) \quad OS_1 = OS_2 + S_2S_1$$

per cui risulta come facilmente si vede

$$(3) \quad m = \frac{l \cos \beta - a \cos \psi}{\cos \gamma}$$

Sostituendo il valore (3) nella (1) e riducendo, si trova

$$(4) \quad l^2 (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) + \\ + 2la (\cos \alpha \cos \gamma - \cos \beta) \cos \psi + a^2 (\cos^2 \psi - \cos^2 \gamma) = 0$$

equazione di 2° grado a cui deve soddisfare l .

Per ognuna delle radici di quest'equazione la (3) dà in corrispondenza un determinato valore per m .

Si hanno così due coppie di valori l, m , tra cui facilmente si riesce a scegliere quella l_1, m_1 corrispondente alla data fotografia,

(1) Ved. p. es. loc. cit. (4).

poichè dalle immagini in generale si potrà giudicare ad occhio quale dei due punti L , M sia più distante e quale più vicino ad O . (S'intende che vanno scartate le soluzioni negative).

Dalla discussione dell'equazione (4) risulta che la soluzione diventa illusoria quando si ha contemporaneamente

$$\beta = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2}, \quad \left(\psi = \frac{\pi}{2} \right)$$

quando cioè il piano passante per il centro di vista e per i punti L , M sia perpendicolare alla direzione data.

Un altro caso di indeterminazione si ha quando i due punti L , M si trovino sopra uno stesso raggio visuale, ($\alpha = 0$).

3. Si fissi ora un sistema di coordinate cartesiane nello spazio, prendendo come origine il punto L_0 , come asse delle z la verticale (diretta in alto), e come piano xy il piano di stazione (prendendo come asse delle x la retta L_0M_0 , e su questa come verso positivo quello che va da L_0 a M_0).

Detti λ , μ , ν i coseni di direzione (noti) della direzione data, e x , y , z le coordinate (incognite) di O , si avrà evidentemente

$$(5) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + (z - h_1)^2 = l_1^2 \\ (x - a_0)^2 + y^2 + (z - h_2)^2 = m_1^2 \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} -\lambda x - \mu y + \nu(h_1 - z) = l_1 \cos \beta \\ \lambda(a - x) - \mu y + \nu(h_2 - z) = m_1 \cos \gamma \end{cases}$$

delle quali ultime relazioni una conseguenza dell'altra.

Si vede subito che al sistema delle equazioni (5) e (6) si può sostituire il seguente

$$(7) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + (z - h_1)^2 = l_1^2 \\ 2a_0x + 2(h_2 - h_1)z - a_0^2 - h_2^2 + h_1^2 + l_1^2 - m_1^2 = 0 \\ \lambda x + \mu y + \nu(z - h_1) + l_1 \cos \beta = 0. \end{cases}$$

Ricavando dalle ultime due delle (7) x e y in funzione di z e sostituendo nella prima si trova un'equazione di 2° grado nella sola z , che risolta dà per z due valori, tra cui si potrà in generale facilmente scegliere quella corrispondente alla data fotografia, osservando che la z del punto di presa cercato dev'essere positiva e maggiore certamente delle quote dei punti L , M , trattandosi di una fotografia aerea, anzi si potrà stabilire un determinato valore a cui dovrà essere certamente superiore. Per l'unico valore di z da prendere in considerazione, le (7) danno i valori corrispondenti di x , y .

Nel caso poi in cui non si riuscisse a decidere tra le due radici z_1 e z_2 , si calcolerebbero per ognuna di esse i valori corrispondenti di x , y dati dalle (7), ottenendo così due terne di valori x_1, y_1, z_1 e x_2, y_2, z_2 , coordinate di due punti O_1 e O_2 soddisfacenti alle condizioni del problema. Si confronterebbe poi la posizione dei punti trovati rispetto al piano verticale passante per la retta LM (piano xz), confrontando i segni di y , e osservando che se da un punto O il punto L è visto p. es. a destra e il punto M a sinistra, per tutti i punti da banda opposta del detto piano succede l'opposto: L è visto a sinistra e M a destra. L'aspetto della fotografia permetterà quindi di decidere quali dei due casi è da prendere in considerazione.

Se questi criteri non bastassero ancora per decidere quale dei due punti O_1, O_2 sia il punto di presa della data fotografia, bisognerebbe ricorrere ad un terzo punto (supposto dato) e ripetere i calcoli precedenti per questo punto, uno dei punti L o M e la data direzione s .

Il problema non ammette soluzioni se la direzione s è parallela alla retta LM , come si vede subito osservando che il punto O cercato giace sul circolo in cui si segano le due sfere (5), circolo il cui piano è perpendicolare alla retta LM congiungente i centri. Esso è uno dei punti di intersezione di questo circolo col piano (6)

$$\lambda x + \mu y + \nu z - h_1 \nu + l_1 \cos \beta = 0$$

che è perpendicolare alla direzione s . Nel caso in cui la direzione s sia parallela alla retta LM , questo piano è dunque parallelo al piano del circolo, e quindi non lo sega in punti reali.