

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

MARIO MANARINI

**Sopra i significati geometrici delle  
componenti covarianti e  
contravarianti di un vettore o  
plurivettore in una varietà  
riemanniana**

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,*  
Vol. **13** (1934), n.1, p. 30–36.

Unione Matematica Italiana

<[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1934\\_1\\_13\\_1\\_30\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_1_30_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Sopra i significati geometrici delle componenti covarianti e contravarianti di un vettore o plurivettore in una varietà riemanniana.**

Nota di MARIO MANARINI (a Bologna).

**Sunto.** - *Si stabiliscono vettorialmente significati geometrici per le componenti covarianti e contravarianti per vettori e plurivettori di una varietà di RIEMANN in estensione di quelli degli spazi euclidei, in questa Nota in parte rielaborati.*

In una Nota recente <sup>(3)</sup>, il prof. BOGGIO ritorna, fra l'altro, su alcune formule vettoriali per le componenti covarianti e contra-

<sup>(3)</sup> Cfr. T. BOGGIO, *Sopra alcune formule relative alle linee e alle ipersuperficie coordinate di una varietà riemanniana* « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », anno XII, 1933, pag. 208.

varianti di un vettore in una varietà metrica  $V_n$ . Credo non privo di interesse indicare un altro modo vettoriale di procedere per la trattazione di queste questioni, nel quale non interviene l'uso degli operatori superficiali nel senso del prof. BOGGIO e di accennare alla trattazione analoga per i plurivettori delle varietà  $V_n$ , che possono riuscire utili quando si voglia trattare vettorialmente il Calcolo differenziale assoluto. Questo metodo si presenta come la naturale estensione di un altro che si può seguire per i vettori e plurivettori dello spazio euclideo  $n$ -dimensionale. Ne conseguono espressive interpretazioni per le componenti covarianti e contravarianti di un vettore e di un plurivettore in una varietà  $V_n$ . Ho cercato, per facilitare la lettura, di non scostarmi molto dai procedimenti usati da altri Autori, quali ad es. il CARTAN e il LEVI-CIVITA; ma naturalmente, una trattazione più vettoriale e semplificativa, e sempre in stretta relazione con i metodi ordinari del Calcolo assoluto, sarebbe impostata in modo diverso.

1. In uno spazio euclideo  $S_n$  consideriamo una  $n$ -pla qualunque di vettori unitari  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  linearmente indipendenti <sup>(1)</sup> ed un vettore  $\mathbf{R}$ . Ponendo

$$(1) \quad \mathbf{R} = \sum_1^n R^i \mathbf{a}_i,$$

le componenti  $R^i$  sono chiamate le *componenti contravarianti* di  $\mathbf{R}$ , mentre sono dette *componenti covarianti* di  $\mathbf{R}$  le sue proiezioni  $R_i$  sugli assi determinati dai vettori  $\mathbf{a}_i$ , cioè

$$(2) \quad R_i = \mathbf{R} \times \mathbf{a}_i.$$

Introduciamo una  $n$ -pla di vettori  $\mathbf{b}_i$ , pure linearmente indipendenti, in generale non unitari, mediante le relazioni

$$(3) \quad \begin{cases} \mathbf{a}_r \times \mathbf{b}_s = 0 & \text{per } r \neq s \\ \mathbf{a}_r \times \mathbf{b}_r = 1. \end{cases}$$

Allora si ha subito

$$(4) \quad \mathbf{R} = \sum_1^n R_i \mathbf{b}_i,$$

$$(5) \quad R^i = \mathbf{R} \times \mathbf{b}_i,$$

le quali presentano una forma analoga alle (1) e (2) rispettivamente. La (4) esprime che le *componenti covarianti*  $R_i$  di  $\mathbf{R}$  sono le *componenti* di  $\mathbf{R}$  secondo i vettori  $\mathbf{b}_i$ .

(1) Ciò che vettorialmente si esprime con:

$$E(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1}) \times \mathbf{a}_n \neq 0 \quad \text{oppure} \quad \mathbf{a}_n \times E(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1}) \neq 0.$$

Se la  $n$ -pla  $\mathbf{a}_i$  è inoltre ortogonale si ha  $\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i$  e  $E^i = E_i$ . Similmente, per un bivettore  $\mathbf{u}$ , semplice o multiplo <sup>(1)</sup>, si può facilmente verificare che è

$$(6) \quad \mathbf{u} = \sum_2 \mathbf{u}^{ij}(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$$

$$(7) \quad \mathbf{u} = \sum_2 \mathbf{u}_{ij}(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)$$

$$(8) \quad \mathbf{u}^{ij} = \mathbf{u} \times (\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)$$

$$(9) \quad \mathbf{u}_{ij} = \mathbf{u} \times (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$$

ove  $u_{ij}$  e  $u^{ij}$  sono rispettivamente le  $\binom{n}{2}$  componenti covarianti e contravarianti del bivettore  $\mathbf{u}$ ; la formula (6) trovasi ad. es. anche nel CARTAN, loc. cit., pag. 12.

2. Nelle varietà riemanniane  $V_n$  si può considerare qualche cosa di analogo potendosi posto per posto stabilire, con criteri del tutto simili a quelli seguiti negli spazi  $S_N$ , il concetto di vettore della  $V_n$  come compendio di grandezza, direzione e verso, le operazioni algebriche ed omografiche relative ed ancora il concetto di plurivettore della  $V_n$ , come compendio di grandezza, giacitura pluridimensionale della  $V_n$  e verso (in maniera simile a quella da me seguita nella mia Memoria citata) e le operazioni algebriche relative.

Consideriamo dunque una varietà  $V_n$  e in essa un sistema di coordinate curvilinee  $x^i$ . Ogni punto  $P$  di  $V_n$  risulta una ben determinata funzione degli argomenti  $x^i$  e perciò si scrive  $P(x^i)$ . Detti  $ds_i$  gli elementi lineari lungo le linee coordinate, essendo  $ds_i = \sqrt{a_{ii}} dx^i$ , ove  $a_{ik}$  sono gli elementi del tensore doppio covariante simmetrico che dà la metrica della varietà, si ha:

$$(10) \quad \frac{\partial P}{\partial x^i} = \frac{dP}{ds_i} \frac{ds_i}{dx^i} = \sqrt{a_{ii}} \mathbf{t}_i,$$

avendo posto  $\mathbf{t}_i = \frac{dP}{ds_i}$  che risulta un versore (vettore unitario) tangente alla linea coordinata ( $x^i$ ) nel verso positivo di questa. Per-

(1) Cfr. E. CARTAN, *Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann* ove il bivettore multiplo è chiamato (pag. 11) « système de bivecteur », e la mia Memoria: *Sul calcolo plurivettoriale negli spazi  $S_n$  e applicazioni alla meccanica dei sistemi rigidi* « Annali di Matematica pura ed applicata », serie IV, tomo XII, 1933-34, pag. 86.

tanto  $\frac{\partial P}{\partial x^i}$ , per  $i=1, 2, \dots, n$ , risultano vettori della  $V_n$  tangenti alle linee  $(x^i)$  e di modulo  $\sqrt{a_{ii}}$ . Poniamo

$$(11) \quad \mathbf{a}_i = \frac{\partial P}{\partial x^i}$$

e determiniamo i vettori  $\mathbf{b}_i$ , della  $V_n$ , mediante le relazioni

$$(12) \quad \begin{cases} \mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_s = 0 \\ \mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i = 1. \end{cases} \quad \text{per } i \neq s.$$

Si scorge che il vettore  $\mathbf{b}_i$  è perpendicolare ai vettori  $\mathbf{a}_s$ , con  $s \neq i$ , quindi alla ipersuperficie coordinata  $x^i = \text{cost.}$ , si trova col verso concorde alle  $x^i$  crescenti, e il suo modulo è dato dalla relazione

$$\text{mod } \mathbf{b}_i \cdot \sqrt{a_{ii}} \text{sen } \Omega_i = 1,$$

ove  $\Omega_i$  è l'angolo della linea coordinata  $(x^i)$  con l'ipersuperficie coordinata  $x^i = \text{cost.}$ ; quindi risulta

$$\text{mod } \mathbf{b}_i = \sqrt{a^{ii}},$$

essendo  $\text{sen } \Omega_i = \frac{1}{\sqrt{a^{ii} a_{ii}}}$ .

Dicendo  $\mathbf{n}_i$  il versore di  $\mathbf{b}_i$ , possiamo porre

$$(13) \quad \mathbf{b}_i = \sqrt{a^{ii}} \mathbf{n}_i.$$

Questi versori  $\mathbf{n}_i$  sono precisamente quelle direzioni particolari considerate dal LEVI-CIVITA <sup>(1)</sup> allo scopo di cui ora diremo e possono essere definiti vettorialmente dalle relazioni

$$(14) \quad \begin{cases} \mathbf{t}_i \times \mathbf{n}_s = 0 \\ \mathbf{t}_i \times \mathbf{n}_i = \frac{1}{\sqrt{a^{ii} a_{ii}}}. \end{cases} \quad \text{per } s \neq i.$$

Considerando le componenti contravarianti dei versori  $\mathbf{t}_i$  e quelle covarianti dei versori  $\mathbf{n}_i$ , il LEVI-CIVITA ottiene <sup>(2)</sup> quali espressioni delle componenti covarianti  $R_i$  e contravarianti  $R^i$  di un vettore  $\mathbf{R}$  della  $V_n$ , le seguenti

$$(15) \quad \begin{cases} R_i = \sqrt{a_{ii}} \mathbf{R} \times \mathbf{t}_i \\ R^i = \sqrt{a^{ii}} \mathbf{R} \times \mathbf{n}_i \end{cases}$$

<sup>(1)</sup> Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto*, raccolte e compilate dal dott. ENRICO PERSICO, 1925; A. Stock, Roma, pag. 146.

<sup>(2)</sup> Loc. cit., pag. 147.

le quali rappresentano le proiezioni del vettore  $\mathbf{R}$  sulle direzioni  $\mathbf{1}_i$  e  $\mathbf{a}_i$  moltiplicate rispettivamente per  $\sqrt{a_{ii}}$ ,  $\sqrt{a^i}$ .

Ancora, se si pone

$$\mathbf{R} = \sum_1^n X_i \mathbf{a}_i$$

$$\mathbf{R} = \sum_1^n Y_i \mathbf{b}_i,$$

moltiplicando scalarmente la prima per  $\mathbf{b}_i$  tenendo conto delle (12), (13), (15) si ricava

$$X_i = R^i,$$

e moltiplicando scalarmente la seconda per  $\mathbf{a}_i$  risulta subito

$$Y_i = R_i.$$

Possiamo quindi scrivere

$$(16) \quad \begin{cases} \mathbf{R} = \sum_1^2 R^i \mathbf{a}_i & (1) \\ \mathbf{R} = \sum_1^2 R_i \mathbf{b}_i, \end{cases}$$

ossia le componenti contravarianti e covarianti di un vettore  $\mathbf{R}$  della  $V_n$  sono rispettivamente le sue componenti secondo i vettori  $\mathbf{a}_i \left( = \frac{\partial P}{\partial x^i} \right)$  ed i vettori  $\mathbf{b}_i$  definiti dalle (12).

Dalle (16) e (12) risulta subito

$$(17) \quad R_i = \mathbf{R} \times \frac{\partial P}{\partial x^i} = \mathbf{R} \times \mathbf{a}_i$$

$$(18) \quad R^i = \mathbf{R} \times \mathbf{b}_i,$$

in modo da poter scrivere

$$(19) \quad \begin{aligned} \mathbf{R} &= \sum_1^n (\mathbf{R} \times \mathbf{a}_i) \mathbf{b}_i = \sum_1^n (\mathbf{R} \times \mathbf{b}_i) \mathbf{a}_i \\ &= \left[ \sum_1^n H(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i) \right] \mathbf{R} = \left[ \sum_1^n H(\mathbf{b}_i, \mathbf{a}_i) \right] \mathbf{R} \end{aligned}$$

ove  $H$  è il simbolo di diade per la  $V_n$  in  $P$ , in conformità alla considerazione fatta al principio di questo numero.

Risulta, per la  $V_n$  in  $P$ , che l'omografia  $\sum_1^n H(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$  è una dilatazione e di più è precisamente una forma diadica dell'omografia

(1) Cfr. *Geometria differenziale* dei proff. BURGATTI, BOGGIO e BURALI-FORTI, pag. 284; A. EGNELL, *L'Océanistique*, pag. 501.

identica 1 per i vettori della  $V_n$  in  $P$ ; essa estende, posto per posto, la forma diadica dell'omografia identica negli spazi euclidei:

$$1 = \sum_1^N H(\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_r) \quad (1).$$

Per completare le relazioni dei vettori  $\mathbf{a}_i$  e  $\mathbf{b}_i$  con gli elementi usati nell'ordinario Calcolo assoluto, aggiungo che sono immediate le formole

$$(20) \quad a_{ik} = \mathbf{a}_i \times \mathbf{n}_k, \quad a^{ik} = \mathbf{b}_i \times \mathbf{b}_k,$$

e per i simboli di CHRISTOFFEL di 1<sup>a</sup> e di 2<sup>a</sup> specie si ha:

$$(21) \quad \left[ \begin{matrix} i & j \\ k \end{matrix} \right] = \frac{\partial^2 P}{\partial x^i \partial x^j} \times \mathbf{a}_k, \quad \left\{ \begin{matrix} i & j \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^i \partial x^j} \times \mathbf{b}_k,$$

le quali ultime si possono stabilire col procedimento seguito dal prof. BOGGIO in una Nota recente (2), sostituendo materialmente i vettori  $\mathbf{b}_i$  ai vettori  $\text{grad}_\sigma x^i$  (gradienti superficiali) ivi considerati.

A proposito del concetto di gradiente superficiale in  $V_n$ , colgo l'occasione per osservare che nella  $V_n$  il gradiente di uno scalare  $\varphi$ , funzione regolare dei punti  $P$ , non può essere considerato che *intrinsecamente* alla varietà  $V_n$  (3), applicando l'ordinaria definizione:  $\text{grad } \varphi \times dP = d\varphi$ .

Ad es. si ha subito

$$\text{grad } x^i = \sqrt{a^{ii}} \mathbf{n}_i = \mathbf{b}_i,$$

poichè in forza della relazione precedente,  $\text{grad } x^i$  è un vettore della  $V_n$ , diretto perpendicolarmente alla ipersuperficie coordinata  $x^i = \text{cost.}$ , nel senso concorde alla  $x^i$  crescente ed avente per modulo la *derivata normale*  $\frac{dx^i}{dn_i}$ , che vale  $\sqrt{a^{ii}}$  essendo

$$dn_i = ds_i \cdot \mathbf{t}_i \times \mathbf{n}_i = \frac{dx^i}{\sqrt{a^{ii}}}. \text{ Soltanto se eventualmente la } V_n \text{ fosse}$$

immersa in una  $V_m$  (euclidea o no) e la  $\varphi$  fosse data *a priori* funzione dei punti di questa varietà, si potrebbe considerare il gradiente di  $\varphi$  in questa  $V_m$ , che si potrebbe chiamare *gradiente ambientale* e si avrebbe che il  $\text{grad } \varphi$  nella  $V_n$  prima considerato, ne verrebbe ad essere la proiezione sopra la  $V_n$ .

(1) Cfr. BURALI-FORTI e MARCOLONGO, *Trasformazioni lineari*, pag. 90.

(2) *Sull'omografia di Riemann relativa ad uno spazio curvo*, « Rend. Acc. Lincei », 1° sem. 1933, pag. 368-374.

(3) Cfr. LEVI-CIVITA, loc. cit., pag. 176; A. EGNELL, loc. cit., pag. 500 e pag. 237. Quest'ultimo Autore lo considera in modo più conforme ai metodi vettoriali.

Valgono poi ovviamente nelle  $V_n$  formule vettoriali per le componenti covarianti e contravarianti dei plurivettori e in particolare per i bivettori, che fanno riscontro alle formule (6), (7), (8), (9) dello spazio euclideo  $S_n$ .