Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Giuseppe Scorza Dragoni

Un'osservazione sui funzionali additivi e semicontinui di curva

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.1, p. 23–30.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_1_23_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1934.

Un'osservazione sui funzionali additivi e semicontinui di curva.

Nota di G. SCORZA DRAGONI (a Roma).

Sunto. - *In questa Nota è indicata una condizione sufficiente perchè un funzionale additivo e semicontinuo di curva sia individuato dai valori che esso assume sulle poligonali.*

In una Nota (²) dedicata alla definizione di lunghezza delle curve, il BARBA giunge al seguente risultato:

Un funzionale $\varphi(\mathrm{c})$ *della curva continua* c, *additivo e inferiormente semicontinuo, uguale alla lunghezza per le poligonali, e tale che sia*

$$\varphi(c_1) = k \cdot \varphi(c_2), \tag{1}$$

se le due curve c_1 *e* c_2 *sono simili nel rapporto di similitudine* k, *coincide con la lunghezza della curva* c.

Orbene in questa Nota mostrerò che:

Un funzionale $\varphi(\mathrm{c})$ *della curva continua* c, *semicontinuo (inferiormente o superiormente) e additivo, che assuma valori uguali per curve congruenti* (³), *è perfettamente individuato, quando se ne conosca il valore, che supporremo finito, sulle poligonali (e si riduce a una funzione lineare e omogenea della sola lunghezza di* c).

(²) G. BARBA, *Sulla definizione di lunghezza di una curva* [« Note ed esercitazioni matematiche », vol. 6, fasc. 1 (1931), pag. 16-18].

(³) Suppongo cioè verificata la (1) per $k = 1$.

La condizione relativa alle curve congruenti è essenziale; nell'ultimo numero di questa Nota vedremo infatti che un funzionale di curva non è ancora individuato ove se ne assegni il valore per le poligonali e gli si imponga soltanto di essere additivo e semicontinuo.

1. Tanto per fissar le idee supporremo φ inferiormente semicontinuo [1], caso al quale ci si può sempre ridurre, previo un cambiamento eventuale di segno.

Mostriamo ora che:

Nelle ipotesi fatte, $\varphi(c)$ *non assume mai valori di segno contrario, se* c *varia nel campo delle poligonali.*

Evidentemente, poichè φ è additivo, basta dimostrare il lemma supponendo che c sia un segmento variabile.

Intanto è chiaro che, se il segmento s si decompone nella somma di n segmenti uguali $s_1, \ldots, s_n$, riesce per le ipotesi fatte

$$\varphi(s_1) = \ldots = \varphi(s_n) = \frac{1}{n}\varphi(s); \tag{2}$$

e di qui segue facilmente il lemma per due segmenti commensurabili s ed s'. Infatti, se σ è un loro sottomultiplo comune, riesce, per due numeri convenienti n e n',

$$\varphi(s) = n\varphi(\sigma), \quad \varphi(s') = n'\varphi(\sigma).$$

Basta quindi dimostrare che l'ipotesi

$$\varphi(s) > 0, \quad \varphi(s') < 0 \tag{3}$$

conduce a un assurdo anche se s ed s' non sono commensurabili. E infatti in ogni intorno prefissato di s esiste un segmento s'', commensurabile con s' e con gli estremi prossimi quanto si vuole ai rispettivi estremi di s; per s'' è inoltre $\varphi(s'') \leq 0$ (anzi $\varphi(s'') < 0$)

[1] Data una curva c, descritta dal punto $P(t)$ funzione continua del parametro t nell'intervallo $t' \leq t \leq t''$, e un numero positivo δ, diremo che la curva c_1, descritta dal punto $P_1(\tau)$ funzione continua di τ nell'intervallo $\tau' \leq \tau \leq \tau''$, appartiene al δ-intorno di c, se fra i due intervalli $t' \leq t \leq t''$ e $\tau' \leq \tau \leq \tau''$ si può porre una corrispondenza biunivoca e continua tale che per valori corrispondenti dei parametri (val quanto dire: se si può rappresentare c_1 a mezzo del parametro t in maniera tale che per punti corrispondenti allo stesso valor del parametro) sia $\overline{PP_1} \leq \delta$.

Un funzionale φ di curva continua sarà inferiormente semicontinuo, se, prefissata ad arbitrio una curva continua c, ad ogni $\varepsilon > 0$ si può far corrispondere un $\delta > 0$ tale che sia $\varphi(c_1) > \varphi(c) - \varepsilon$ per tutte le curve continue c_1 contenute nel δ-intorno di c.

per quanto siano venuti dicendo e per la $\varphi(s') < 0$; quindi per la semicontinuità inferiore di φ riesce $\varphi(s) \leq 0$, il che contraddice la prima delle (3).

2. Dal risultato precedente e dalla additività di φ si trae senz' altro

$$|\varphi(s')| \leq |\varphi(s'')|,$$

se il segmento s' è contenuto in s''; di qui e dalla (2) segue allora che per $\overline{PQ} \to 0$ è

$$\varphi(PQ) \to 0. \tag{4}$$

Inoltre sui segmenti φ si riduce a una funzione $f(l)$ della loro lunghezza l, dato che non ne dipende dalla posizione.

L' additività di φ si traduce per la $f(l)$ nella

$$f(l_1 + l_2) = f(l_1) + f(l_2) \qquad (l_1 > 0,\ l_2 > 0) \tag{5}$$

e la (4) equivale a dire che è $f(l) \to 0$, se $l \to 0$ con $l > 0$.

Ma allora, se prolunghiamo la definizione di $f(l)$ ponendo

$$f(0) = 0, \quad f(l) = -f(-l) \qquad (l < 0).$$

la (5) è sempre valida per valori qualunque di l_1 e l_2, ed è sempre $f(l) \to 0$, se $l \to 0$.

Facendo tendere l_2 a zero nella (5), si ha che $f(l)$ è continua; ma allora è notorio che $f(l)$ è individuata dalla (5) a meno di una costante moltiplicativa ed è anzi della forma $h \cdot l$ con $h =$ cost [1].

3. Poichè $\varphi(c)$ è additivo, sarà evidentemente

$$\varphi(c) = h \cdot l,$$

anche se c è una poligonale di lunghezza l [2]; e poichè la lunghezza è già nel campo delle poligonali un funzionale inferiormente ma non superiormente semicontinuo, $\varphi(c)$ non può esser inferiormente semicontinuo, se non a patto che sia $h \geq 0$.

Il funzionale $\Phi(c)$ uguale alla lunghezza, moltipilcata per h, della curva continua c [3] è allora un prolungamento di φ, consi-

[1] Questo risultato si può raggiungere più rapidamente, tenendo conto che le funzioni lineari e omogenee di l sono le sole a verificare la (5) anche se si spazia nel campo più vasto delle funzioni misurabili: vedi H. Lebesgue, *Sur les transformations ponctuelles, transformant les plans en plans, qu'on peut definir par des procédés analytiques* [« Atti della R. Acc. di Torino », vol. 42 (1906-1907), pag. 532-539], pag. 538.

[2] Infatti, se $s_1, \ldots, s_n$ sono i segmenti da cui è composta c e $l_1, \ldots, l_n$ ne sono le lunghezze rispettive, riesce $\varphi(c) = \varphi(s_1) + \ldots + \varphi(s_n) = h \cdot l$.

[3] Se c non è rettificabile, porremo $\Phi(c) = +\infty$.

derato come definito solo per le poligonali, che ne rispetta la semicontinuità inferiore [1] e l'additività.

E il nostro teorema sarà giustificato non appena avremo visto che nelle ipotesi fatte è

$$\varphi(c) = \Phi(c) \tag{6}$$

per ogni curva continua c.

4. Supponiamo che la (6) non sia verificata.

Esisterà allora [2] una curva continua c per la quale riesce $\varphi(c) \neq \Phi(c)$; e dovrà essere

$$\varphi(c) < \Phi(c),$$

data la semicontinuità inferiore di $\varphi(c)$.

Consideriamo una rappresentazione della c a mezzo di un parametro t variabile da 0 a 1.

Supponiamo dapprima $-\infty < \varphi(c)$, $\Phi(c) < +\infty$ e poniamo

$$\varphi(c)/\Phi(c) = \rho < 1.$$

Dividiamo l'intervallo $0 \leq t \leq 1$ in n parti uguali mediante i punti

$$0, \quad \frac{1}{n}, \ldots, \quad \frac{n-1}{n}, \quad 1 \tag{7}$$

e indichiamo con

$$B_{n,0}, \ldots, \quad B_{n,n}$$

i punti di c rispettivamente corrispondenti ai valori (7) del parametro. Allora, posto

$$s_{n,i} = B_{n,i-1}B_{n,i}, \quad p_n = s_{n,1} + \ldots + s_{n,n} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

dalla definizione di $\Phi(c)$ segue che per n sufficientemente grande $(\geq N)$ riesce

$$\rho \cdot \Phi(c) \leq \rho_1 \cdot \Phi(p_n) = \rho_1 \cdot \varphi(p_n),$$

dove ρ_1 è un numero compreso fra ρ ed 1, che intendiamo fissato.

Indi è

$$\varphi(c) = \rho\Phi(c) \leq \rho_1\varphi(p_n) \qquad (n \geq N) \tag{8}$$

e, indicato con $c_{n,i}$ l'arco descritto dal punto di c mentre il parametro varia da $\frac{i-1}{n}$ a $\frac{i}{n}$ $(i = 1, \ldots, n)$, la (8) equivale alla

$$\sum_i^{1\ldots n} \varphi(c_{n,i}) \leq \rho_1 \sum_i^{1\ldots n} \varphi(s_{n,i}) \qquad (n \geq N);$$

[1] Il che non sarebbe vero, se h fosse negativo.

[2] Per il ragionamento svolto in questo numero, cfr. BARBA, loc. cit..

da cui segue che per almeno un valore dell'indice i, e diciamone j_n il più piccolo, riesce

(9) $$\varphi(c_{n,i}) \leq \rho_1 \cdot \varphi(s_{n,i}) \qquad (n \geq N).$$

Poniamo per brevità

$$c_n = c_{n,j_n}, \quad s_n = s_{n,j_n}, \quad P_n = B_{n,j_n-1}, \quad Q_n = B_{n,j_n} \qquad (n \geq N).$$

Fissato allora un numero positivo δ, noi possiamo sempre supporre che, per n sufficientemente grande $(n \geq N(\delta))$, oltre a esser verificata la

(10) $$\varphi(c_n) \leq \rho_1 \cdot \varphi(s_n)$$

sia

$$\overline{AB} < \delta,$$

se A è il punto corrente di s_n e B quello di c_n (di guisa che c_n appartiene al δ-intorno di s_n), e

(11) $$\overline{P_n Q_n} < \delta.$$

Su un segmento fissato PQ, riportiamo, a partire da un estremo, q_n segmenti consecutivi

$$\sigma_{n,1}, \ldots, \sigma_{n,q_n}$$

uguali a s_n, q_n essendo determinato dalle relazioni

(12) $$q_n s_n \leq PQ < (q_n + 1) s_n$$

di guisa che il segmento

$$\sigma_n = \sigma_{n,1} + \ldots + \sigma_{n,q_n}$$

appartiene evidentemente al δ-intorno di PQ, poichè la parte di PQ che non è contenuta in σ_n ha, per le (11) e (12), una lunghezza minore di δ.

Su ciascuno di questi segmenti $\sigma_{n,i}$ come corda adattiamo un arco $\gamma_{n,i}$ uguale a c_n; e indichiamo con γ_n la loro somma

$$\gamma_n = \gamma_{n,1} + \ldots + \gamma_{n,q_n}.$$

Allora è chiaro che γ_n appartiene al δ-intorno di σ_n (perchè lo stesso accade per c_n e s_n); e poichè σ_n appartiene al δ-intorno di PQ. γ_n apparterrà evidentemente al 2δ-intorno di PQ.

Sarà inoltre, in virtù della (10),

(13) $$\begin{aligned} \varphi(\gamma_n) &= \varphi(\gamma_{n,1}) + \ldots + \varphi(\gamma_{n,q_n}) = \\ &= q_n \varphi(c_n) \leq \rho_1 q_n \varphi(s_n) = \rho_1 \varphi(\sigma_n) \leq \rho_1 \varphi(PQ) \end{aligned}$$

per ogni $n \geq N(\delta)$.

Ma ρ_1 è una costante minore di 1; δ è arbitrario e per $n \geq N(\delta)$ la curva γ_n appartiene al 2δ-intorno di PQ; quindi la (13) contraddice la semicontinuità inferiore di φ.

5. Se $\Phi(c) = +\infty$, $\varphi(c) > -\infty$, per n sufficientemente grande sarà

$$\Phi(p_n) = \varphi(p_n) \geq \bar{\rho} \cdot \varphi(c),$$

$\bar{\rho}$ essendo prefissato a piacere (¹); alla $\varphi(c) \leq \rho_1 \cdot \varphi(p_n)$ si può quindi soddisfare per ogni $\rho_1 < 1$; e questo caso è ricondotto al precedente.

Se poi si osserva che la $\varphi(c) = -\infty$ non si può presentare, perchè altrimenti la $\varphi(c) \leq \rho_1 \cdot \varphi(p_n)$, e quindi la (9), sarebbe verificata senz'altro per ogni $\rho_1 \geq 0$ (data la $\varphi(p_n) \geq 0$), si ha che in ogni caso il respingere la (6) conduce a un assurdo. E questo è sufficiente alla giustificazione del teorema.

6. Dimostriamo ora che:

Un funzionale $\varphi(c)$ delle curve continue e rettificabili c contenute in un piano α (²) non è ancora individuato dalle condizioni di essere additivo e inferiormente semicontinuo e di ridursi alla lunghezza sulle poligonali.

Infatti, se con $\psi(c)$ indichiamo la lunghezza di c, si può porre

$$\varphi(c) = \psi(c).$$

Ma, fissata nel piano α una circonferenza C di raggio unitario, dico che si può anche porre

$$\varphi(c) = \psi_1(c),$$

se $\psi_1(c)$ è definito nel modo che segue.

Data una rappresentazione parametrica di c nell'intervallo $0 \leq t \leq 1$, indichiamo con E l'insieme, serrato (³) se non vuoto, dei valori di t che corrispondono a punti comuni a c e C; con s_1, s_2,... gli intervalli aperti contigui (⁴) ad E (⁵); con $\bar{s}_i$ l'intervallo s_i estremi compresi; con c_1, c_2,... gli archi descritti dal punto di c mentre il parametro varia rispettivamente in $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$,...; e, premesso questo, poniamo

$$\psi_1(c) = \psi(c_1) + \psi(c_2) + \dots \quad (⁶).$$

(¹) Si rammenti che è, per ipotesi, $\varphi(c) < +\infty$.

(²) È questa, come quella della rettificabilità, un'ipotesi semplificatrice. Per es., includendo le curve non rettificabili, si potrebbe imporre a φ anche la condizione di essere $+\infty$ su queste curve.

(³) *Serrato*, nel senso di SEVERI; cioè *chiuso*, nel senso di CANTOR.

(⁴) Cfr. L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* [Zanichelli, Bologna], vol. I, pag. 107.

(⁵) I quali, come è noto, costituiscono al più un'infinità numerabile.

(⁶) Si noti che, se il secondo membro è una serie, questa è sempre convergente. Si osservi inoltre che la definizione di $\psi_1(c)$ è indipendente dalla rappresentazione parametrica di c adottata.

Sarà allora, infatti,

$$\psi_1(c) = \psi(c)$$

per una curva c che non incontri C o per una poligonale (che incontra C al più un numero finito di volte).

Dalla definizione stessa appare inoltre che $\psi_1(c)$ è additivo.

Ed è anche evidente che $\psi_1(c)$ è inferiormente semicontinuo nel campo delle curve che non incontrano C [1].

Consideriamo allora una curva rettificabile e continua c che incontri C e supponiamo in un primo momento che per questa curva i segmenti $s_1, s_2, \ldots$ siano in numero finito; diciamo n questo numero.

Determiniamo i segmenti $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, rispettivamente contenuti, estremi compresi, in $\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n$ (e, quindi, interni a $s_1, \ldots, s_n$), in maniera tale che, detto γ_i l'arco di c corrispondente a σ_i, sia

$$\sum_i^{1\ldots n} \psi(\gamma_i) > \sum_i^{1\ldots n} \psi(c_i) - \frac{\varepsilon}{2} = \psi_1(c) - \frac{\varepsilon}{2}, \tag{14}$$

dove $\varepsilon > 0$ è un numero prefissato ad arbitrio.

Poichè $\gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ è, al pari di C, un insieme serrato e limitato e non ha punti in comune con C, la sua distanza da C è un numero positivo η.

Sia inoltre δ_i ($< \eta$ e > 0) un numero tale che per una curva continua e rettificabile $\bar{\gamma}_i$, appartenente al δ_i-intorno di γ_i, riesca

$$\psi(\bar{\gamma}_i) > \psi(\gamma_i) - \frac{\varepsilon}{2n} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

e indichiamo con δ il più piccolo dei δ_i.

Allora, se c' è una curva continua e rettificabile appartenente al δ-intorno di c, dico che è

$$\psi_1(c') > \psi_1(c) - \varepsilon. \tag{15}$$

Infatti c' si può supporre [2] rappresentata sull'intervallo $0 \leq t \leq 1$ in maniera che l'arco γ_i' di c' corrispondente al segmento σ_i appartenga al δ-intorno di γ_i. Indi γ_i' non incontra C ed è

$$\psi(\gamma_i') \geq \psi(\gamma_i) - \frac{\varepsilon}{2n};$$

(1) Infatti su queste curve $\psi_1(c)$ coincide con la lunghezza, mentre se una curva continua c non ha punti in comune con C, essa ha da C una distanza $\eta > 0$ (essendo c e C due insiemi serrati e limitati), di guisa che le curve appartenenti a un δ-intorno di c, con $\delta < \eta$, non incontrano nemmeno esse C.

(2) Vedi la nota (1), apposta al n. 1.

ne segue

$$\psi_1(c') \geq \sum_i^{1\ldots n} \psi(\gamma_i') \geq \sum_i^{1\ldots n} \psi(\gamma_i) - \frac{\varepsilon}{2},$$

cioè, per la (14), la (15).

Se i segmenti s_1, s_2,... sono infiniti, fissato ε, ne considereremo un numero n sufficientemente grande perchè sia

$$\sum_i^{1\ldots n} \psi(c_i) > \psi_1(c) - \frac{\varepsilon}{4};$$

la (14) si tradurrà in una relazione del tipo

$$\sum_i^{1\ldots n} \psi(\gamma_i) > \sum_i^{1\ldots n} \psi(c_i) - \frac{\varepsilon}{4} > \psi_1(c) - \frac{\varepsilon}{2};$$

e ragionando come nel caso precedente si ritroverà la (15), che afferma appunto la semicontinuità inferiore di $\varphi(c)$ anche sulle curve che incontrano C.

Ma su C è $\psi_1(C) = 0$, $\psi(C) = 2\pi$, quindi il funzionale dato dalla lunghezza nel campo delle poligonali ammette almeno due (¹) prolungamenti distinti, nel campo delle curve rettificabili, che ne rispettino l'additività e la semicontinuità (²).

(¹) E quindi infiniti.

(²) Per un esempio del genere (in cui però l'additività viene a mancare) cfr. M. FRÉCHET, *Sur le prolongement des fonctionelles semi-continues e sur l'aire des surfaces courbes* [« Fundamenta Mathematica », Tomo VII (1925), pag. 210-224], pag. 214.