BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

BEPPO LEVI

Sul teorema d'identità per le funzioni analitiche di più variabili

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.1, p. 1–5.
Unione Matematica Italiana
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1934.

PICCOLE NOTE

Sul teorema d'identità per le funzioni analitiche di più variabili.

Nota di BEPPO LEVI (a Bologna).

Sunto. - *Costruzione di successioni di punti con unico punto limite, tali che l'annullarsi in essi di una serie di potenze di più variabili convergente intorno al detto punto limite implica il suo annullarsi identico.*

Una serie di potenze di una sola variabile avente raggio di convergenza non nullo è nulla identicamente se si annulla in un aggregato (E) di punti del piano complesso avente per punto d'accumulazione l'origine; ed è noto che è questa l'unica condizione (sì necessaria che sufficiente) cui deve soddisfare l'aggregato (E). Una proposizione altrettanto precisa e completa, per le serie di potenze di più variabili, non è nota e pare anche non facilmente enunciabile. Nei trattati (¹) ci si accontenta generalmente di stabilire che *se* $\Sigma\, a_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \dots x_k^{\mu_k}$ *è una serie di potenze (intere positive) ed esistono per le* k *variabili* k *successioni di valori*

$$x_{i1} \quad x_{i2} \dots \qquad (i = 1, 2, \dots, k) \qquad (\lim_{l \to \infty} x_{il} = 0)$$

tali che per ciascun sistema di valori delle x_i *della forma* $(x_{1l_1}, x_{2l_2}, \dots x_{kl_k})$ *la serie assuma il valore* 0, *allora la serie è identicamente nulla.* È chiaro che l'aggregato di punti in cui, secondo questa proposizione, si chiede, per ipotesi, l'annullamento della funzione ha infiniti punti limiti; la più semplice richiesta che possa farsi per avvicinare la economia delle ipotesi a quella del citato teorema per le funzioni di una sola variabile consiste nel chiedere che *l'aggregato di punti in cui si suppone annullarsi la*

(¹) Cfr. p. es. OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, T. II.

serie di potenze abbia come unico punto limite l'origine. Della questione, posta in questi termini, si sono già occupati vari autori, generalmente come problema collaterale ad altre questioni [1]: le considerazioni che seguono pare abbiano il vantaggio, esaminando il problema in sè, di darne qualche risoluzione ricorrendo ai minimi mezzi dimostrativi. Il lettore rileverà pure facilmente che le considerazioni esposte sono variamente generalizzabili.

1. Osserviamo anzitutto che dal teorema d'identità a condizioni amplissime sopra ricordato segue immediatamente che *una serie di potenze di più variabili è identicamente nulla se si annulla per i valori reali delle variabili,* od anche soltanto *entro un cono reale avente per centro l'origine,* bastando supporre le x_{i_h} reali ed, eventualmente, operare una evidente trasformazione di variabili.

Dopo ciò, si costruisce una successione di punti soddisfacente alle condizioni richieste nel modo seguente: Fissato arbitrariamente nello spazio reale (a k dimensioni) un cono con centro l'origine, vi si fissi un sistema numerabile (anzi numerato) denso di raggi, uscenti dall'origine; (potranno essere ad es. i raggi ca-

[1] Precisamente la questione è trattata da P. MONTEL (*Leçons sur les familles normales des fonctions analytiques*, Paris, Gauthier-Villars, 1927, p. 246) per il caso delle funzioni di due sole variabili, e poi da C. CARATHÉODORY (*Ein dem Vitalischen analoger Satz für analytische Funktionen von mehreren Veränderlichen*, (« Journ. f. die reine u. angew. Math. », Bd. 165 (1931), p. 180-183) per le funzioni di un numero qualsiasi di variabili, allo scopo di assegnare condizioni per la convergenza verso una funzione analitica di una successione di funzioni analitiche di più variabili, analoghe al Teorema di VITALI per le funzioni di una variabile. Per scopo analogo G. BOULIGAND enuncia una proposizione relativa all'annullarsi di una funzione armonica di un numero qualsiasi di variabili in *Mémorial des Sc. Mathématiques, Fonctions harmoniques, Principes de Picard et de Dirichlet* (p. 20).

La precedente bibliografia mi è fornita da una cortese (sebbene indiretta) comunicazione del sig. MONTEL e solo parzialmente mi era nota quando fu compiuta la piccola ricerca che forma l'argomento della Nota, occasionata questa da una conversazione nell'Istituto Matematico dell'Università di Bologna. Ritengo che i precedenti accennati non tolgano alla Nota presente l'interesse di una maggiore elementarità dei mezzi, di una forma diversa delle soluzioni proposte e di qualche considerazione complementare. Voglio aggiungere che, in seguito alla accennata conversazione, anche il collega FANTAPPIÈ e T. VIOLA proposero una soluzione del problema forse più simile a quelle contenute nella accennata bibliografia, insieme con altre vedute il cui approfondimento potrà dar luogo ad una ricerca ulteriore.

ratterizzati da valori razionali dei rapporti $\frac{x_i}{x_1}$ $(i = 2, \ldots, k)$). Sul raggio che, nella supposta numerazione porta il numero d'ordine ν si segni una successione di punti aventi per limite l'origine e distanti da questa al massimo per $\frac{1}{\nu}$. *Se una serie di potenze si annulla in tutti questi punti, è nulla identicamente.* Infatti sopra ciascuno dei raggi del sistema fissato essa si esprime come funzione analitica (serie di potenze) della distanza dall'origine: e poichè vi si annulla in infiniti punti aventi l'origine come punto limite, è — su ciascuno dei detti raggi — nulla. A causa della supposta densità del sistema di raggi, la funzione è dunque nulla in tutto il cono; e, per l'osservazione precedente, identicamente nulla.

2. Si può, complicando appena la definizione del sistema di raggi, togliere la condizione di densità. Sempre restando, per fissare le idee, nello spazio reale, si chiami O l'origine e si fissi successivamente uno spazio a $k-1$ dimensioni, in esso e per O, che si dirà o_{k-1}; uno spazio a $k-2$ dimensioni in questo e per O, che si dirà o_{k-2}; e così successivamente gli spazi o_{k-3}, $o_{k-4}, \ldots$, fino a o_1, retta per O in o_2. Dopo ciò, nel fascio avente per asse o_{k-2} si fissi una successione di spazi a $k-1$ dimensioni aventi per limite o_{k-1}; in ciascuno di questi, nel fascio avente per asse o_{k-3} si fissi una successione di spazi a $k-2$ dimensioni aventi per limite o_{k-2}; in ciascuno di questi, nel fascio di asse o_{k-4} si fissi una successione di spazi a $k-3$ dimensioni aventi per limite o_{k-3}, e così di seguito fino a fissare un sistema di rette. Esso sarà numerabile, e si potranno segnare su dette rette i punti in cui si chiede l'annullarsi della funzione, colla stessa regola indicata al n. prec.. Che una funzione annullantesi in questi punti sia identicamente nulla si vede subito osservando che intanto essa si annulla su tutte le rette tracciate: ora queste si ordinano in piani e su ciascun piano hanno o_1 come retta limite: se, su uno di questi piani, si conduce una retta non passante per O, essa incontra le dette rette in infiniti punti aventi il punto di intersezione con o_1 come punto di accumulazione: ne segue che la funzione è nulla su tutta la retta; essa è dunque nulla su ciascuno di questi piani. I piani si ordinano in spazi a 3 dimensioni e su ciascuno hanno come piano limite o_2: si conclude allora analogamente che la funzione è nulla in ciascuno dei detti spazi a 3 dimensioni. Così risalendo si giunge a mostrare che la funzione si annulla in tutto lo spazio reale a k dimensioni.

3. È chiaro che le costruzioni precedenti si possono variamente mutare: si potrà anzitutto, mediante un artificio evidente analogo a quello usato per assicurare che il sistema dei punti non abbia altro punto limite che O, disporre che *i raggi sostegno del sistema di punti non abbiano altra retta limite che* o_1, e parimenti *i piani per* o_1 *su cui sono distribuiti i punti del sistema non abbiano altro piano limite che* o_2; e così di seguito o_3 *sia il solo spazio limite degli spazi a tre dimensioni sostegno del sistema* ecc. Si potrà d'altronde, mediante trasformazioni di variabili, portare la costruzione fuori degli spazi reali ed anche fuori di spazi lineari.

4. Si nota anche che la costruzione dei n.[i] 2, 3 rientra, come caso particolare, nella seguente che procede per induzione da $k-1$ a k. *In uno spazio a* $k-1$ *dimensioni complesse* ($2(k-1)$ dimensioni reali) *sia fissato arbitrariamente un aggregato* (e) *di punti che non possano essere zeri di una funzione analitica non nulla di* $k-1$ *variabili, numerabile e numerato. Dall'origine* O *dello spazio a* k *dimensioni complesse* (che si suppone fuori del detto spazio a $k-1$ dimensioni) *si projettino questi punti mediante rette complesse* (ossia, piani caratteristici); *su ciascuna di queste si fissi una successione di punti avente* O *come unico punto di accumulazione*, in modo che la massima distanza da O dei punti scelti su ciascuna retta tenda a O col tendere a ∞ del numero d'ordine della retta medesima. *Si sarà così costruito un aggregato* (E) *soddisfacente alla questione.* Sia infatti $f(x_1 x_2 \dots x_k)$ una funzione analitica (serie di potenze) che si annulli nei punti di (E): essa si annulla in tutti i punti delle rette complesse uscenti da O e contenenti questi punti (e cioè projettanti i punti di (e)): supponiamo che lo spazio sostegno di (e) sia un $x_1 = x_1^0 = \text{cost.} \neq 0$; allora su ciascuno spazio $x_1 = \text{cost.}$ (qualunque sia la costante $\neq 0$) la f si annulla in tutti i punti di un aggregato simile a (e) e perciò si annulla in tutto il detto spazio. Essa è quindi identicamente nulla.

5. Accennerò ancora ad un tipo di costruzione, per l'aggregato cercato, la quale procede per induzione da $k-2$ a k. Nello spazio a $k-2$ dimensioni (complesse) $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, sia fissato un sistema numerabile (e) di punti che non possano essere tutti zeri per una funzione analitica non nulla delle $k-2$ variabili $x_3 \dots x_k$. Si projettino questi punti dal punto $O = (00 \dots 0)$ (per es.) mediante rette complesse (sulle quali sarà quindi sempre $x_2 = 0$). Per ciascuna di queste rette si assegni arbitrariamente una successione di rette, pure uscenti da O, ma fuori dello spazio $x_2 = 0$, che abbiano la detta retta come limite unico. Numerato poi il sistema totale delle rette così definite (escluse o incluse, a volontà, le rette projettanti (e)) si fissino arbitrariamente, su ciascuna di esse, un certo numero *finito* di punti colle sole condizioni che: 1°) il numero dei punti su ciascuna retta tenda a ∞ col numero d'ordine della retta; 2°) la loro massima distanza da O tenda a 0 col tendere a ∞ del numero d'ordine della retta. *Si sarà così definito un aggregato* (E) *di punti che non possono essere tutti zeri per una funzione analitica non nulla delle* k *variabili* $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Se infatti $f(x_1 x_2 \ldots x_k)$ è una tal funzione, si potrà anzitutto supporre che essa non sia divisibile per x_2, perchè in ogni caso un tale fattore può essere allontanato. Allora la funzione $f(x_1, 0, x_1\xi_3, \ldots, x_1\xi_k)$ (dove $\xi_3, \ldots, \xi_k$ rappresentano nuove variabili) non può essere nulla (identicamente rispetto ad x_1) per ogni sistema di valori delle $\xi_3 \ldots \xi_k$ che siano le coordinate di punti di (e), perchè, in tale ipotesi, essa funzione dovrebbe essere identicamente nulla e quindi $f(x_1, x_2, x_1\xi_3, \ldots, x_1\xi_k)$ divisibile per x_2. Sia $f(x_1, 0, x_1\Xi_3, \ldots, x_1\Xi_k) \neq 0$ $(\Xi_3 \ldots \Xi_k)$ punto di (e): poichè è d'altronde $f(00 \ldots 0) = 0$, alla $f(x_1, x_1\xi_2, x_1\xi_3, \ldots, x_1\xi_k)$ si può applicare, nell'intorno del punto $(00\Xi_3 \ldots \Xi_k)$ il *Vorbereitungsatz* separandone un fattore algebroide in x_1: ciò contraddice all'ipotesi che $f(x_1 x_2 \ldots x_k)$ si annulli in tutti i punti di (E), perchè fra questi vi sono gruppi numerosi quanto si vuole le cui coordinate sono della forma $(x_1, x_1\xi_2, x_1\xi_3, \ldots, x_1\xi_k)$ con $|x_1|$ arbitrariamente piccolo e $(\xi_2\xi_3 \ldots \xi_k)$ prossimo quanto si vuole a $(0\Xi_3 \ldots \Xi_k)$.