Bollettino Unione Matematica Italiana

Guido Ascoli

Sulle funzioni a variazione limitata

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **13** (1934), n.1, p. 18–23.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1934_1_13_1_18_0>

Sulle funzioni a variazione limitata.

Nota di Guido Ascoli (a Pisa).

Sunto. - *Si dànno tre proprietà caratteristiche delle coppie di funzioni monotone che rappresentano la variazione positiva e la variazione negativa di una medesima funzione a variazione limitata.*

Secondo un risultato ormai classico, una funzione $f(x)$ a variazione limitata in un intervallo $a \vdash\dashv b$ può scriversi sotto la forma

(1) $$f(x) = f(a) + P(x) - N(x)$$

essendo $P(x)$, $N(x)$ due funzioni crescenti (in senso esteso), che rappresentano rispettivamente la variazione positiva e la variazione negativa di $f(x)$ tra a e x, e si annullano quindi per $x = a$.

Viceversa, essendo $P(x)$, $N(x)$ due funzioni crescenti che si annullano per $x = a$, la formula

$$f(x) = C + P(x) - N(x) \tag{2}$$

con C costante, dà una funzione a variazione limitata; però $P(x)$ e $N(x)$ non sono necessariamente le variazioni, positiva e negativa, di $f(x)$ tra a e x.

Per vedere quando ciò avvenga, è sufficiente la verifica diretta, cioè il calcolo di una delle variazioni di $f(x)$ (o anche della variazione totale); essa può essere però semplificata in varî modi che, per quanto ovvii, non mi sembrano privi di interesse, e che qui mi propongo di esporre.

1. *a) Condizione necessaria e sufficiente affinchè le funzioni* $\mathrm{P(x)}$, $\mathrm{N(x)}$, *crescenti (in senso esteso) in* $\mathrm{a} \vdash\!\dashv \mathrm{b}$, *nulle per* $\mathrm{x = a}$, *siano variazione positiva e variazione negativa di una medesima funzione a variazione limitata è che, per ogni* $\varepsilon > 0$, *si possa trovare una divisione dell'intervallo* $\mathrm{a} \vdash\!\dashv \mathrm{b}$ *in intervalli parziali, in numero finito, in modo che, detti* $\Delta\mathrm{P}$, $\Delta\mathrm{N}$ *gli incrementi di* $\mathrm{P(x)}$, $\mathrm{N(x)}$ *in uno qualunque di essi,* m *il minore tra* $\Delta\mathrm{P}$ *e* $\Delta\mathrm{N}$, *si abbia*

$$\Sigma m < \varepsilon. \tag{3}$$

La condizione è necessaria. Se infatti $P(x)$ e $N(x)$ sono variazione positiva e negativa di $f(x)$ tra a e x, vale la (1) e si ha quindi

$$\Delta f = \Delta P - \Delta N \tag{4}$$

sicchè l'identità evidente

$$2m = \Delta P + \Delta N - |\Delta P - \Delta N| \tag{5}$$

prende la forma

$$2m = \Delta P + \Delta N - |\Delta f|. \tag{6}$$

Da questa si ottiene, per una qualunque divisione in intervalli parziali:

$$2\Sigma m = P(b) + N(b) - \Sigma|\Delta f|, \tag{7}$$

tenuto conto che $P(a) = N(a) = 0$.

Ora $P(b) + N(b)$ è la variazione totale di $f(x)$ in $a \vdash\!\dashv b$, e cioè l'estremo superiore delle $\Sigma|\Delta f|$; dunque Σm ha per estremo inferiore lo zero, come afferma il teorema.

La condizione è sufficiente. Si costruisca infatti la $f(x)$ definita dalla (2), valgono ancora le precedenti relazioni (4), (5), (6), (7). Da quest'ultima segue allora, per l'ipotesi del teorema, che l'estremo superiore delle $\Sigma|\Delta f|$ è precisamente $P(b) + N(b)$, ossia che questa è la variazione totale di $f(x)$ in $a \vdash\!\dashv b$. Se poi si osserva che le ipotesi del teorema, ove sussistano per l'intervallo $a \vdash\!\dashv b$, sussistono evidentemente per la sua parte $a \vdash\!\dashv x$, si conclude che, più generalmente, è $P(x) + N(x)$ la variazione di $f(x)$ in $a \vdash\!\dashv x$. Detta questa $V(x)$, si ha allora

$$P(x) - N(x) = f(x) - f(a), \quad P(x) + N(x) = V(x)$$

e da ciò segue senz'altro che $P(x)$ e $N(x)$ sono le variazioni, positiva e negativa, di $f(x)$ in $a \vdash\!\dashv x$.

2. Prima di passare ad una seconda forma della condizione in questione, dobbiamo ricordare che nelle sue ricerche sulle forme quadratiche con infinite variabili [1] E. HELLINGER ha avuto occasione di introdurre alcuni nuovi processi integrali, uno dei quali ha per simbolo

$$\int_a^b \sqrt{dg(x)dh(x)};$$

in esso $g(x)$, $h(x)$ sono funzioni crescenti (in senso esteso) in $a \vdash\!\dashv b$, e l'integrale rappresenta l'estremo inferiore delle somme $\Sigma\sqrt{\Delta g \cdot \Delta h}$ relative a tutte le possibili divisioni dell'intervallo in intervalli parziali, in numero finito [2]. Si ha allora:

b) Condizione necessaria e sufficiente affinchè le funzioni P(x), N(x) *crescenti (in senso esteso) in* $a \vdash\!\dashv b$, *nulle per* $x = a$, *siano variazione positiva e variazione negativa di una medesima funzione a variazione limitata è che si abbia*

$$\int_a^b \sqrt{dP(x) \cdot dN(x)} = 0. \tag{8}$$

Basterà dimostrare l'equivalenza della condizione qui enunciata con quella del teor. *a)*. Conserviamo perciò le notazioni del n. 1, indicando di più con M il massimo degli incrementi ΔP, ΔN rela-

(1) HELLINGER E., *Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlichvielen Variablen* (« Dissertation », Göttingen, 1907), pag. 31.

(2) HELLINGER considera propriamente il caso di $g(x)$, $h(x)$ continue e definisce il suo integrale come un limite, come nella usuale teoria degli integrali di RIEMANN e di STIELTJES; ne deduce la proprietà del testo. È da notare che per le altre formazioni integrali considerate da HELLINGER (integrale di df^2/dg e di $dfdg/dh$) è stata compiuta (da H. HAHN) una riduzione a integrali di LEBESGUE mediante un opportuno cambiamento di variabile. Non mi risulta che altrettanto si sia riusciti a fare per la formazione qui considerata.

tivi a una parte qualunque dell'intervallo. Per una divisione qualunque dell'intervallo in intervalli parziali avremo allora, in virtù di una nota diseguaglianza di LAGRANGE

$$\Sigma\sqrt{\Delta P\cdot\Delta N}=\Sigma\sqrt{Mm}\leq\sqrt{\Sigma M\cdot\Sigma m},$$

ed essendo in ogni caso $M\leq\Delta P+\Delta N$

$$\Sigma\sqrt{\Delta P\cdot\Delta N}\leq\sqrt{[P(b)+N(b)]\Sigma m}.$$

Di qui risulta subito che se Σm ha per limite inferiore lo zero, lo stesso avviene anche per $\Sigma\sqrt{\Delta P\cdot\Delta N}$, ossia vale la (8). Dalla condizione *a)* segue dunque la *b)*.

Si ha d'altra parte

$$\Sigma\sqrt{\Delta P\cdot\Delta N}=\Sigma\sqrt{Mm}\geq\Sigma m,$$

se quindi $\Sigma\sqrt{\Delta P\cdot\Delta N}$ ha per limite inferiore lo zero, lo stesso avviene anche per Σm. Dalla condizione *b)* segue dunque la *a)*, e il teorema è dimostrato.

Il criterio *b)* si presta meglio di *a)* ad alcune applicazioni. Si ha per esempio immediatamente: *Se* P(x), N(x) *sono variazione positiva e negativa di una stessa funzione, tali sono anche* λP(x), μN(x) *con* λ, μ *costanti* ≥ 0.

3. Nell'ipotesi che $P(x)$ e $N(x)$ siano assolutamente continue è possibile dare un criterio notevolmente semplice che potrebbe ottenersi come conseguenza del teor. *b)*, ma che è assai più facile ottenere direttamente, con dimostrazione molto simile a quella di *a)*.

Si indichino con $P'(x)$, $N'(x)$ le funzioni eguali alle derivate di $P(x)$, $N(x)$, ove queste esistono finite (e cioè quasi ovunque), a zero nei punti rimanenti. Si ha allora

$$P(x)=\int_a^x P'(t)dt,\qquad N(x)=\int_a^x N'(t)dt,$$

mentre la variazione totale di $f(x)=C+P(x)-N(x)$ tra a e x è data, come è noto, da

$$V(x)=\int_a^x |f'(x)|\,dx=\int_a^x |P'(t)-N'(t)|\,dt.$$

La condizione che si sta cercando è in sostanza quella che sia $V(x)=P(x)+N(x)$; si può dunque scriverla:

$$\int_a^x \{P'(t)+N'(t)-|P'(t)-N'(t)|\}\,di=0,$$

e questa equivale all'altra che sia, per quasi tutti gli x,

$$P'(x) + N'(x) - |P'(x) - N'(x)| = 0$$

ossia sia nullo quasi ovunque il minore tra i numeri $P'(x)$, $N'(x)$; ossia uno almeno di essi, giacchè essi non sono mai negativi. Possiamo così enunciare:

c) Condizione necessaria e sufficiente affinchè le funzioni P(x), N(x), *crescenti (in senso esteso) in* a $\vdash\!\dashv$ b, *nulle per* x = a, *assolutamente continue, siano variazione positiva e negativa di una stessa funzione, è che l'insieme dei punti in cui esistono finite e non ambedue nulle le derivate di* P(x) *e* N(x) *abbia misura nulla.*

4. Ecco un esempio semplicissimo di applicazione dei criteri precedenti. Sia $P(x) = kx$ $(k > 0)$ e come funzione $N(x)$ si assuma la nota funzione $\xi(x)$ di LEBESGUE, con cui si ottiene la rappresentazione biunivoca (e ordinata) dell'insieme ternario di CANTOR nell'intervallo $0 \vdash\!\dashv 1$ [1]. La $\xi(x)$ è crescente, continua, ma non assolutamente; nei punti dell'insieme Z definito da

$$x = \Sigma \frac{a_n}{3^n} \qquad (a_n = 0 \text{ oppure } 2)$$

è

$$\xi(x) = \frac{1}{2} \Sigma \frac{a_n}{2^n}$$

mentre negli intervalli contigui a Z la $\xi(x)$ è costante (col valore che essa ha nei punti estremi).

Per applicare il criterio *a)*, divideremo l'intervallo in 3^n parti eguali; in 2^n di queste è $\Delta N = 1/2^n$, nelle altre è $\Delta N = 0$; in tutte è invece $\Delta P = k/3^n$. Ora per n abbastanza grande è

$$\frac{k}{3^n} < \frac{1}{2^n},$$

ed è allora $m = k/3^n$ nelle parti del primo tipo, $m = 0$ nelle altre. Ne segue

$$\Sigma m = 2^n \cdot \frac{k}{3^n} = k \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

che tende a zero per $n \to \infty$. La condizione è soddisfatta.

Per applicare il criterio *b)*, si osserverà invece che, con la stessa suddivisione, si ha

$$\Sigma \sqrt{\Delta P \cdot \Delta N} = 2^n \sqrt{\frac{k}{3^n} \cdot \frac{1}{2^n}} = \sqrt{k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

(1) Cfr. LEBESGUE H., *Leçons sur l'intégration*, pag 55.

e quindi

$$\int_0^1 \sqrt{dP dN} = 0$$

con la stessa conclusione.

In questo esempio, una delle due funzioni ha tratti di invariabilità (ne ha anzi infiniti); potrebbe darsi un esempio in cui nè $P(x)$ nè $N(x)$ hanno tratti di invariabilità, e il relativo integrale di HELLINGER è ancora zero (1).

(1) Cfr. HELLINGER, loc. cit., pag. 32. È notevole che le coppie di funzioni $P(x)$, $N(x)$ per le quali l'integrale di HELLINGER è nullo hanno una certa importanza nelle ricerche di questo Autore (loc. cit., pag. 78), il quale però non ha avuto occasione di notare l'interpretazione che poteva darsi di questo fatto.