Bollettino Unione Matematica Italiana

UMI

Recensioni

* Jahrbuch Ueber die Fortschritte der Mathematik
* Pappùs D'Alexandrie: La Collection Mathématique. Oeuvre (Ettore Bortolotti)
* C. C. Mac-DvffEe: The Theorie of Matrices
* H. v. Mangoldt's: Einführung in die höhere Mathematik für Studierende und zum selbst Studium.
* L. Bèrzolari: Algebraische Transformationen und Korrespondenzen (B. Segre)
* R. Putthof f: Die anschauliche Natur der geometrischen Grundbegriffe
* C. Carathéodory: Die Kurven mit beschränkten Biegungen
* D. Fog: Ueber den Vierscheitelsatz und seine Verallgemeinerungen
* I. F. Ritt: Differential equations from the algebraic standpoint
* Prank Morley - F. V. Morley: Inversive Geometrg (Beniamino Segre)
* P. A. M. Dirac: Les principes de la Mécanique quantique
* F. Klein: Vorlesungen über die hyper geometrische Funktion
* F. Severi: Lezioni di Analisi (Luigi Fantappiè)
* G. Julia, Essai sur le développement de la théorie des fonctions de variables complexes
* R. Estève et H. Mitault : Cours d'Algèbre, à Vusage des Classes de 3ème, 2de, et lère de l'enseignement secondaire

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **12** (1933), n.5, p. 331–345.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_5_331_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1933.

RECENSIONI

Jahrbuch Ueber die Fortschritte der Mathematik.

Son usciti altri 4 nuovi fascicoli di questo importante periodico, e precisamente i fascicoli 1° e 2° del Volume 55-2 (annata 1929), che trattano la Storia, la Filosofia, la Pedagogia, la Teoria degli insiemi; l'Aritmetica e l'Algebra; ed i fascicoli 1°, 4°; del Volume 56-1 (annata 1930), che trattano della Matematica applicata e della Geometria. Si va così rapidamente colmando il vuoto che si era fatto, nella successione di questi volumi, che rappresentano lo sviluppo della scienza matematica negli ultimi 50 anni. Speriamo. che raggiunto il pareggio, la pubblicazione dei riassunti possa più dappresso seguire le pubblicazioni giornalmente date in luce.

PAPPUS D'ALEXANDRIE: *La Collection Mathématique.* Oeuvre traduite pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes par PAUL VER EECKE. (Due tomi in 8° grande di p. CXXVI + 884).

Questa traduzione era desiderata ed attesa sia dagli storici della matematica che dai cultori di questa scienza perchè non se ne avevano altre versioni all'infuori di quelle latine del COMMANDINO e dell'HULTSCH, non agevolmente accessibili agli studiosi.

L'Opera di PAPPO è una delle più interessanti e suggestive, ed anche delle più difficili e oscure. Constava originalmente di 8 libri: il primo è ora perduto, del secondo rimangono alcuni frammenti, gli altri sei sono integralmente conservati. Pare composta sulla fine del III secolo o nel principio del IV, come compendio di lezioni date nel Museo di Alessandria. Costituisce una vasta raccolta di proposizioni, prese da un gran numero di opere (oggi quasi tutte perdute), che si presentano fornite di nuove dimostrazioni, di dotti commenti, di preziose illustrazioni storiche, di lemmi intesi a chiarire i passi più difficili.

I frammenti che ci rimangono del 2° Libro trattano quel ramo di aritmetica che gli antichi chiamavano: «*Logistica*», ed insegnano ad operare su numeri rappresentati in quel sistema di numerazione, procedente per periodi di miriadi. che il PAPPO fa risalire ad APPOLLONIO, e del quale quì appunto si ha avuto notizia.

Nel 3° Libro è notevole la prima parte, che tratta della « *Duplicazione del cubo* ». Incomincia con una fine confutazione delle soluzioni date da taluni geometri mediante costruzioni avvalentesi della riga e del compasso. Il PAPPO avverte esser quello un «*Problema solido*» tale cioè da richiedere l'uso di sezioni coniche o di linee di ordine superiore. Espone dettagliatamente le soluzioni strumentali date da ERATOSTENE, da NICOMEDE, da HERONE, e poscia ne propone una sua propria, che pare proceda da quella primamente data da DIOCLE. Alcuni hanno voluto vedere nei procedimenti quivi considerati da PAPPO la indicazione di un metodo di indefinita approssimazione numerica pel calcolo delle radici cubiche; ciò che non era nello stile degli antichi, ma che, seguendo indirizzi moderni, potrebbe essere ricavato dalla iterazione di quelle costruzioni che il PAPPO aveva giustamente refutate.

Anche la seconda parte di questo libro è interessante, poichè si tratta in essa delle varie *medie* che gli antichi consideravano. La costruzione di tre termini, aventi fra loro la relazione richiesta dalle singole definizioni di tali medie, esige la risoluzione di equazioni indeterminate del 2° grado: fanno eccezione la media aritmetica e quella che il PAPPO ha chiamato *Settima medietà;* per queste il problema si riduce a semplici equazioni lineari, che il PAPPO trascura, mentre per tutte le altre ha dato, con metodo elegante, la soluzione in termini minimi.

Il 4° Libro si inizia con alcune proposizioni sui *Contatti dei cerchi:* che conducono alla soluzione del problema classico della costruzione del *cerchio tangente a tre cerchi dati*, e, come applicazione, alla costruzione di una indefinita successione di cerchi inscritti nell'ARBELO archimediano, con la condizione che ciascuno di essi sia tangente al precedente ed a due dei semicerchi che limitano l'ARBELO. Nella seconda parte del Libro si dà notizia di alcune curve piane e spaziali: le *Spirali* archimediane, le *Concoidi di* NICOMEDE, la *Quadratrice di Dinostrato, l'Elica sferica.* A proposito di quest'ultima si dimostra con un procedimento deduttivo di classica perfezione, che: « *se un punto mobile, partendo dal polo di una sfera percorre un quarto di meridiano, intanto che la sfera compie una intera rotazione intorno all'asse* (uscente dal polo), *l'area della porzione di sfera, compresa l'equatore e la linea descritta dal mobile, equivale al quadrato del diametro della sfera* »; questa proposizione ci offre il primo esempio conosciuto del calcolo in termini finiti dell'area di una superficie curva.

Allo studio delle linee piane dianzi ricordate si collega quello del problema della «*Trisezione dell'angolo*» che in questo Libro ampiamente e dottamente trattato nel suo sviluppo storico.

Il 5° Libro è interamente dedicato alle proprietà delle *figure isomere*, cioè alle figure piane isoperimetriche ed alle solide di egual area, nell'intento di dimostrare la proprietà di area massima del cerchio e di massimo volume della sfera.

Il Libro 6° contiene i commentari a diverse opere di ottica e di astronomia di TEODOSIO *tripolita*, di AUTOLICO *da Pitana*, di ARISTARCO *da Samo*, e di EUCLIDE.

Il Libro 7° è fra tutti il più importante, ed è veramente prezioso per la storia della geometria greca, poichè costituisce l'unica fonte che noi possediamo sopra un gruppo di opere che costituiva il corpo di scienza dagli antichi conosciuto col nome di: «*Collezione analitica*». Sono in tutti 33 libri, che PAPPO presenta nell'ordine seguente: Il *Libro dei «Dati» di* EUCLIDE; due libri di «*Sezione d'area*», due di «*Sezione determinata*» e due sui «*Contatti*» di APOLLONIO; tre libri di «*Porismi*» di EUCLIDE; due «*Delle Inclinazioni*», due di «*Luoghi piani*», ed otto «*Delle Coniche*» di APOLLONIO, cinque dei «*Luoghi solidi*» di ARISTEO, due dei «*Luoghi alla superficie*» di EUCLIDE; ed infine due di «*Medietà*» di ERATOSTENE.

Di tutti questi libri ci sono rimasti solo il libro dei «*Dati*», e sette degli otto libri delle «*Coniche*» di APOLLONIO. PAPPO, dopo averli tutti enumerati, ne considera i primi 24, dei quali dà prima un chiaro sommario, poscia una ricchissima serie di «*Lemmi*» coi quali intende di preparare lo studioso alla lettura di ogni singolo libro. Questi *Lemmi* ci offrono così una idea abbastanza compiuta del contenuto di quelle opere, che, come abbiamo detto, non sono giunte fino a noi; sono poi, per se stessi molto importanti, sia per la materia, sia per il metodo seguito nella esposizione, il quale, a differenza di quel che si riscontra nelle opere classiche di EUCLIDE, di ARCHIMEDE, di APOLLONIO, non è esclusivamente deduttivo, ma completa la esposizione sintetica, con una indagine preventiva condotta con elegante sicurezza, che insegna la strada da seguire per la invenzione della proposizione enunciata, o per la ricerca della soluzione del problema proposto. I «*Lemmi*» di PAPPO hanno ispirato ai maggiori geometri del rinascimento ed a molti dei moderni, poderosi lavori di *divinazione* per la ricostruzione dei libri perduti; ed hanno dato lo spunto allo sviluppo di interessanti teorie geometriche. In particolare ricordiamo, collo CHASLES, che la teoria della «*Involuzione*», quella della «*Polarità rispetto al cerchio*», insieme con le proprietà fondamentali dei *gruppi armonici*, trovano la loro prima origine in taluni di questi Lemmi, e che in molte delle proposizioni quivi riportate lo ZEUTHEN ha riconosciuto sviluppi superiori dell' « *Algebra geometrica* » degli antichi.

Ma è anche da osservare che le 237 proposizioni di questo Libro offrono una inesauribile miniera di problemi geometrici di rara eleganza. Ricordiamo fra altri quello che domanda il *luogo dei punti tali che il prodotto delle loro distanze da* n *rette date nel piano, sia in dato rapporto col prodotto delle distanze da altre* n *rette, parimenti date*. Problema che fu il punto di partenza per la *Geometria analitica* di CARTESIO. Ricordiamo ancora il problema di *inscrivere in un dato cerchio un triangolo i cui lati passino per tre punti dati,* quello che richiede che *si inserisca fra il lato* DC *di un quadrato* ABCD *ed il prolungamento del lato adiacente* AD *un segmento di lunghezza data, allineato col vertice opposto* B *del quadrato...,* problemi che hanno occupato matematici di fama, anche in tempi moderni, ed hanno dato luogo ad interessanti generalizzazioni. in svariati indirizzi. Ricordiamo infine che fra quei *Lemmi* si trova anche il celebre *Teorema di Guldino*, sui volumi e su le superfici dei solidi di rivoluzione. Quest' ultimo, peraltro, benchè si possa far risalire ai tempi di PAPPO, lascia qualche dubbio di autenticità, e pare ragionevole il sospetto di una interpolazione.

Il Libro 8° è interamente dedicato a problemi di meccanica, che sono rilevati da scritti, non tutti fino a noi pervenuti, di ARCHIMEDE, di FILONE da *Bisanzio,* di TOLOMEO...

Rimane a dire dell' *Opera del Traduttore*. La versione fatta dal PAUL VER EECKE direttamente dal testo greco, è integrale ed assolutamente letterale, tale cioè da conservare anche la forma arcaica della esposizione; ma è accompagnata da note a piè di pagina che ne danno la interpretazione in simboli matematici e nel linguaggio matematico moderno, con l' autorità e la sicurezza che vien conferita dalla padronanza della lingua greca, dello stile matematico dei classici e della materia contenuta negli autori che il presente traduttore ha precedentemente tradotto e commentato: autori dai quali la « *Collezione* » di PAPPO, direttamente è derivata. Ma oltre a ciò troviamo, in quelle note, diligente notizia delle varianti contenute nei varii codici, troviamo riportate le interpretazioni, le integrazioni, i commenti, non solo del più illustre dei traduttori, del COMMANDINO, (che in quest' opera ha lasciato il suo capolavoro), non solo dell' HULTSCH, cui si deve il testo greco, nella edizione critica; ma di tutti coloro che nello studio delle « *Collezioni matematiche* » dedicarono, con altezza di intelletto, operoso travaglio. Vediamo così a tempo e luogo, riportati, discussi, messi a confronto colla impeccabile traduzione dell' originale, i giudizi e le opi–

nioni di umanisti, e di matematici di ogni tempo, quali lo SCALIGERO, il SIMPSON, l'HALLEY, lo CHASLES, il DUHEM, il TANNERY.... Per avere idea della improbità di lavoro che debbono aver costato quelle note, basti considerare che esse sono in numero di poco inferiore al 4º migliaio, e, per ogni argomento, per ogni proposizione esposta, o anche solo incidentalmente accennata, viene in esse ricercata, precisata e riportata la fonte, e vien data notizia dei successivi sviluppi, nell'antichità, e nella scienza moderna.

Di particolare interesse è la « *Introduzione* », che da sola forma un volume di 126 pagine, e raccoglie tutto quello che si conosce su l'autore, su l'opera, su le vicende che ne accompagnarono il recupero, su la varia sua fortuna attraverso i secoli.

ETTORE BORTOLOTTI

C. C. MAC-DUFFEE: *The Theorie of Matrices.* (Nella raccolta « Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete », J. Springer, Berlin, 1933). Pagg. V-110.

La recente opera del prof. MAC-DUFFEE si riferisce ad una teoria che, sotto a varie forme, comparisce in non pochi capitoli di primaria importanza della Matematica: trasformazioni lineari, teoria dei vettori, forme bilineari e quadratiche, algebre associative, varie questioni di geometria analitica e di meccanica, ecc., e che va trovando cospicua applicazione nello sviluppo odierno della fisica teorica: intendiamo la Teoria delle matrici, o, se vuolsi, degli operatori lineari o distributivi. L'A. non si limita ad assumere come elementi del campo su cui opera il solito sistema dei numeri reali o complessi, ma considera campi costituiti da corpi algebrici più o meno estesi, mostrando così come la teoria delle matrici si presti quale sussidio in questioni varie pertinenti alla teoria dei numeri.

Il primo Capitolo costituisce la parte introduttoria e definisce i quadri od « arrays », le matrici, i determinanti e dà il fondamento di un'algebra di cui le matrici sono gli elementi; nel Capitolo II è studiata l'equazione fondamentale o caratteristica e sono esaminate le varie particolarità delle radici caratteristiche; nei seguenti Capitoli (da III a VI) vengono svolti (per matrici operanti in diversi campi algebrici) i concetti di matrici associate, di equivalenza, di similitudine, mettendo in luce la funzione dei divisori elementari; il Cap. VII è dedicato al cosidetto calcolo di composizione delle matrici; l'VIII, alla risoluzione di equazioni di cui i coefficienti e le incognite sono matrici; nel Cap. IX si studiano le funzioni di matrici e si esaminano le diverse definizioni che si sono proposte per giungere al concetto di funzioni analitiche di matrici. Fin qui, si è sempre trattato in modo esclusivo, di matrici di ordine finito: nel Cap. IX ed ultimo, è fatta una rapida rassegna delle principali questioni relative alle matrici d'ordine infinito.

Il presente libro, che in una mole non molto estesa racchiude una grande copia di materiale, e notevole sopratutto per il numero straordinario di citazioni: è veramente ammirevole la cura posta dall'A, nella ricerca bibliografica, che abbraccia un periodo di oltre tre quarti di secolo: da HAMILTON ai più recenti scrittori. Sembra però sfuggita all'A. un'opera sulle operazioni distributive pubblicata nel 1901 da due Autori italiani. Appunto per il numero considerevole di citazioni, sarebbe desiderabile che in una successiva edizione venisse aggiunto un indice bibliografico, a riassumere le innumerevcli indicazioni a piè di pagina, ed anche un lessico che, richiamando il significato delle molte denominazioni e dei molti termini, alcuni dei quali, (come ad esempio quelli introdotti dal SYLVESTER) poco noti, permettesse al lettore di ritrovarne rapidamente il signifieato. Forse il gran numero di citazioni interrompe ad ogni pagina la continuità dell'esposizione; ma se vogliamo considerare l'opera piuttosto come un istrumento di consultazione che come un manuale di avviamento didattico, non possiamo che dare lode all'A. di un libro che dovrà trovarsi presso quanti si dedicano allo studio dell'importante argomento.

H. v. MANGOLDT'S: *Einführung in die höhere Mathematik für Studierende und zum selbst Studium.* Edizione completamente rifusa ed ampliata per cura di K. KNOPP. Vol. III, pagg. XVI–618. Berlino, S. Hirzel, 1933.

L'opera del v. MANGOLDT, che dal 1914 data della prima edizione, ha avuto tale successo da giungere ora alla sesta, si presenta oggi notevolmente ampliata ed in buona parte fondamentalmente rifusa per opera del distinto professore di Tubinga, CORRADO KNOPP. Il terzo volume, ora comparso, è dedicato al Calcolo integrale e alle sue principali applicazioni, alla teoria delle funzioni e alle equazioni differenziali. Il libro, egregiamente redatto e ricco di svariate nozioni, risponde al concetto che manifestamente ha guidato gli AA., di dare cioè il massimo numero di utili cognizioni, senza troppo indugiarsi nello sviluppo della parte critica, pur senza venir meno ad un ragionevole rigore. Nelle due prime parti, integrali indefiniti ed integrali definiti, si indicano i problemi principali del Calcolo integrale, si danno le regole per la ricerca delle primitivi nei casi usuali delle funzioni razionali, delle irrazionali e delle trascendenti più elementari, con esame e discussioni di numerosi casi appropriatamente scelti; per gl'integrali definiti, dato il criterio riemanniano, non ci si addentra ulteriormente nelle possibili estensioni del concetto di integrale. Un opportuno sviluppo è dato ai varî metodi di approssimazione. Le parti terza e quarta sono dedicate al Calcolo delle aree, delle lunghezze d'arco e d'integrale curvilineo, cui si collega un accenno alla differenziazione dei vettori. La quinta parte costituisce una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche, coll'integrazione nel campo complesso, il teorema di CAUCHY, gli sviluppi di TAYLOR e di LAURENT, la continuazione analitica. Le due parti seguenti trattano degli integrali multipli e delle loro applicazioni al calcolo dei volumi con decomposizione in prismi, in piramidi ed in strati, alla misura dell'area delle superficie, alla determinazione dei centri di gravità, dei momenti d'inerzia, dei potenziali. I teoremi di GAUSS, di GREEN e di STOCKES, il concetto di campo vettoriale e quello di divergenza formano materia dell'ottava parte, mentre la nona, dedicata agli integrali impropri, adombra rapidamente interessanti teorie, come quella della funzione Gamma, della serie di FOURIER, del calcolo di speciali integrali impropri. Infine la decima parte dà, in modo compendioso ma sufficiente, la teoria delle equazioni differenziali ordinarie. Questa rapida rassegna dimostra come il libro del v. MANGOLDT, nella nuova veste datagli dallo KNOPP, venga ad essere un chiaro ed utile istrumento di studio e di consultazione. (*u*)

L. BERZOLARI: *Algebraische Transformationen und Korrespondenzen.* « Encykl. d. Math. Wiss. », III, 2, pp. 1781–2218.

Questo Articolo dell'Enciclopedia tedesca, dedicato alle trasformazioni e corrispondenze algebriche, verrà certo accolto col più grande interesse; esso costituisce da solo un volume di oltre 400 pagine, che deve esser costato all'A. — di cui è ben nota l'accuratezza esemplare — anni ed anni di minuzioso lavoro. Il BERZOLARI può dunque vantare un nuovo vivido titolo di benemerenza, che si aggiunge ai molti da questo distinto geometra conquistati, oltrecchè colla propria produzione originale, coi numerosi Articoli pubblicati con raro eclettismo su argomenti disparati, in varie Enciclopedie italiane e straniere.

Si tratta di un'Opera utilissima, oltre che imponente, nella quale i cultori di Geometria algebrica potranno trovare indicazioni preziose e copiosi argomenti per nuove ricerche. Il testo è abilmente redatto in guisa da poter esser letto con profitto anche da chi non è versato in materia, ed è integrato da estese note a piè di pagina — in numero di 1126 — dense di erudite notizie bibliografiche.

L'Articolo, ultimato nel dicembre 1932, può dirsi una rassegna esauriente e ben coordinata dei risultati fino a tal epoca conseguiti sulle *corrispondenze algebriche* (1). Esso si divide in 8 Parti (comprendenti complessivamente 121 paragrafi), che trattano ordinatamente delle prime *definizioni* e *proprietà* relative alle corrispondenze algebriche, dei vari *principî di corrispondenza,* della teoria delle *corrispondenze fra curve algebriche,* delle corrispondenze algebriche fra spazi lineari *(trasformazioni cremoniane* e *non cremoniane),* di varie applicazioni *(enti generabili mediante trasformazioni algebriche fra varietà, riduzione delle singolarità e dei sistemi lineari di curve o superficie,* ecc.), delle rappresentazioni piane di *superficie razionali,* di altre particolari rappresentazioni e corrispondenze algebriche (alcune *varietà razionali a tre dimensioni, connessi,* ecc.). Uno sguardo all'indice dettagliato posto in principio è sufficiente, meglio di quanto non possano fare questi brevi cenni, per dare un'idea della ricca e multiforme materia trattata. Non è poi da tacere uno dei meriti del magistrale lavoro: intendiamo la giusta valutazione del largo contributo dato dai geometri italiani al ramo di Scienza cui l'Articolo del BERZOLARI è dedicato.

B. SEGRE

R. POTTHOFF: *Die anschauliche Natur der geometrischen Grundbegriffe,* (Münster i. W., Aschendorff, 1930), p. 28, M. 1.

In questo opuscolo le nozioni geometriche fondamentali (nell'ordine: *piano, sfera, retta, punto, lunghezza,* ecc.) vengono introdotte in modo intuitivo, ricollegandole sostanzialmente alla considerazione di opportuni *sottogruppi del gruppo dei movimenti.*

Quest'idea interessante — però tutt'altro che nuova, in quanto la si può far risalire a HELMHOLTZ e LIE — è qui sviluppata in modo piuttosto superficiale e non del tutto privo di contraddizioni (2), allo scopo di approfondire i postulati della Geometria, intesa come Scienza del mondo fisico.

(1) Non tolgon certo pregio al lavoro alcune lievi, inevitabili mende, come qualche rara omissione di citazioni bibliografiche, o la dosatura dello spazio in qualche punto meno proporzionata all'importanza dei singoli argomenti.

(2) Così ad es. a p. 9, definendo la *rigidità* di un corpo, si suppone implicitamente che il corpo di confronto che ivi si considera sia rigido, il che manifestamente costituisce un circolo vizioso.

C. CARATHÉODORY: *Die Kurven mit beschränkten Biegungen*, « Preuss. Akad. d. Wiss. », 1933, pp. 102-125.
D. FOG: *Ueber den Vierscheitelsatz und seine Verallgemeinerungen*. ibid., pp. 251-254.

Una classe di curve che si presentano in importanti questioni di Geometria e di Analisi (equazioni differenziali, calcolo delle variazioni, ecc.) è costituita dalle curve la cui prima curvatura si mantiene limitata, p. es. ≤ 1: ipotesi che si può sostituire con quella meno restrittiva che *la curvatura media di ogni arco parziale sia* ≤ 1. Di tali curve il CARATHÉODORY (nella 1ª Nota) assegna varie eleganti proprietà, come ad es. la seguente che le caratterizza: nessun loro arco parziale convenientemente piccolo può esser tutto esterno ad una sfera di raggio unitario che ne contenga gli estremi: da qui risulta, fra l'altro, che *curve della classe suddetta non possono che convergere verso curve della classe medesima*.

La 2ª Nota dà una nuova semplice dimostrazione del teorema affermante che *nel piano un' ovale contiene sempre almeno 4 vertici* (punti in cui la curvatura ha un estremo), nonchè la sua estensione alle curve sferiche. *b. s.*

J. F. RITT: *Differential equations from the algebraic standpoint*, « Colloquium pubblications » (New York, 1932), pp. X+172.

Questa monografia, dedicata allo studio dei *sistemi di equazioni differenziali che sono algebrici nelle funzioni incognite e nelle loro derivate*, arreca a tale campo — finora quasi inesplorato — contributi notevolissimi.

Una *forma differenziale* o, brevemente, una *forma*, è un polinomio (non necessariamente omogeneo) in $n \geq 1$ funzioni $y_1, y_2, \dots, y_n$ di una variabile complessa x ed in alcune loro derivate $y_{ir} = d^r y_i/dx^r$. I cui coefficienti sono funzioni della x appartenenti ad una classe chiusa rispetto alle operazioni razionali e di derivazione. Un insieme finito od infinito di forme costituisce un *sistema*, Σ, la cui *varietà* (manifold) è formata dalla totalità dei gruppi di funzioni $y_1, y_2, \dots, y_n$ (*soluzioni* di Σ) che ne annullano le forme. Un sistema Σ dicesi *riducibile* od *irriducibile*, secondochè esistono o non esistono due forme G ed H, nessuna delle quali si annulli per ogni soluzione di Σ, mentre il prodotto GH si annulla.

Il teorema di HILBERT, concernente l'esistenza di una base finita per un sistema infinito di polinomi (in un numero finito di variabili), non vale per i *sistemi infiniti di forme* (che son polinomi nelle y_{ir}, per $i = 1, 2, \dots, n$; $r = 0, 1, 2, \dots$): un tale sistema.

però, contiene sempre un *sottosistema **finito** che ha la sua stessa varietà*. È poi da rilevare che *ogni sistema riducibile di forme è **equivalente** a due o più sistemi irriducibili* (in numero finito, e sostanzialmente individuati da quello), nel senso che la varietà del primo sistema è la somma logica delle varietà relative agli ultimi.

Ciò che fin qui si è esposto, non è che una parte del contenuto delle prime 20 pagine, ma può bastare a dar un'idea del genere di questioni di cui il libro si occupa: perciò ci limitiamo a riassumere assai sommariamente il resto.

Dopo aver posto una netta definizione di *integrale generale* di un'equazione differenziale, vi è una parziale estensione ai sistemi di forme differenziali della teoria dell'*eliminazione algebrica*, con applicazione al *risultante* di due forme in una funzione incognita: segue la dimostrazione del fatto che *ogni sistema di forme con* n *funzioni incognite è equivalente ad un sistema di al più* n + 1 *forme* (ciò che costituisce l'analogo di un classico teorema di KRONECKER). Vi è quindi la parte ***costruttiva***, concernente le risolventi e la riduzione di un sistema a sistemi irriducibili, nonchè l'analisi approfondita della ***struttura*** della varietà di un sistema irriducibile, e l'estensione di teoremi algebrici di HILBERT–NETTO e di LÜROTH. Da ultimo, varie delle precedenti ricerche vengono generalizzate pei *sistemi di equazioni alle derivate parziali*, dopo aver detto dei risultati di RIQUIER sull'argomento.

L'esposizione è chiara; ma la si sarebbe potuta render più perspicua con maggiori esemplificazioni, e valendosi in certi punti del linguaggio geometrico. *b. s.*

FRANK MORLEY – F. V. MORLEY: *Inversive Geometry*, (London, Bell, 1933), pp. IX+273.

Questo Trattato espone in modo originale numerosissimi risultati di *Geometria metrica piana*, di *Geometria delle affinità circolari* (in particolare delle *inversioni*, le quali dànno il titolo al libro), nonchè di *Meccanica*. Gli strumenti usati sono essenzialmente analitici, e poggiano principalmente sulla classica *rappresentazione* dei punti (reali) del piano coi valori di una variabile complessa x; p. es. una trasformazione puntuale del piano si traduce in un legame funzionale fra due variabili complesse, e l'equazione di una curva si ha ponendo la x funzione di un parametro (p. es. reale, oppure di modulo unitario).

L'impiego della suddetta rappresentazione, unita all'indirizzo gruppale di KLEIN e POINCARÉ, interviene qui sistematicamente

— forse per la prima volta — nello studio di questioni di carattere relativamente elementare; e gli AA. fanno di tali elementi uso assai abile, giungendo con procedimento uniforme, sotto forma stringata e talvolta brillante, a risultati molteplici: tale procedimento offre però lo svantaggio di non lasciarsi estendere allo spazio.

Il libro — corredato di utili esercizi — è di facile lettura, poichè ben poche sono le nozioni presupposte, e l'esposizione è piana e scorrevole. Il valore ch'esso potrebbe avere come testo di consultazione, è menomato dal fatto che mancano completamente enunciati che pongano in rilievo le definizioni ed i risultati conseguiti: questi poi, per l'unilateralità del punto di vista addottato, assai raramente sono collegati a teorie più elevate. Nulladimeno l'Opera è interessante pei metodi impiegati, e pel gusto geometrico con cui sono scelti gli argomenti.

Essa si divide in due Parti. La prima Parte si occupa del gruppo dei *movimenti* e delle *similitudini* di un piano, e di quello delle *affinità circolari*, soffermandosi alquanto su loro *sottogruppi* finiti ed infiniti — alcuni dei quali forniscono classiche rappresentazioni delle *Geometrie non euclidee* — e studiando varie *configurazioni*. Vi è inoltre un Capitolo in cui i *moti piani di un fluido incompressibile* vengono ricollegati nel modo conosciuto alla teoria delle funzioni analitiche, ed uno — fra i più notevoli — dedicato alla *Geometria differenziale* relativa al gruppo delle inversioni.

La seconda Parte tratta di certe rappresentazioni analitiche delle *rette* e dei *cerchi* di un piano, dei *poligoni regolari* di 5, 7, 11 lati, della *cinematica dei sistemi piani rigidi*, della *geometria del triangolo* con generalizzazioni, di varie particolari *curve razionali*, e di alcune *trasformazioni cremoniane*.

BENIAMINO SEGRE

P. A. M. DIRAC: *Les principes de la Mécanique quantique.* (Recueil des Conférences-rapports de documentation sur la Physique), traduzione di AL. PROCA e J. ULLMO, Paris, « Les Presses universitaires de France », 1931 (pp. VIII+314).

Questa traduzione francese dell'opera del DIRAC ha il merito di rendere accessibile agli studiosi italiani, in una lingua di solito più conosciuta, l'architettura essenziale della nuova teoria dei quanti, come è vista suggestivamente dalla forte personalità dell'Autore, uno dei maggiori artefici della teoria stessa.

Particolarmente interessante per i matematici è il metodo « simbolico » seguito, e cioè una teoria logica, seppure non intuitiva, degli « stati » e degli « osservabili » (enti fisici che in altre trattazioni sono rappresentati fin dall'inizio dagli enti matematici « funzioni » e « operatori lineari » rispettivamente) che qui sono sistematicamente usati sia nella parte generale, sia nelle numerose applicazioni, tra le quali, infine, lo studio relativistico dell'elettrone, che, con la spiegazione dell'elettrone rotante (« spin »), costituisce forse uno dei maggiori successi personali dell'Autore. *l. f.*

F. KLEIN: *Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion*, (« Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen », Band XXXIX), Berlin, J. Springer, 1933 (pagine IX+344).

Le lezioni di KLEIN sulla funzione ipergeometrica (dell'inverno 1893-94), finora in litografie, vengono ora pubblicate per le stampe dal prof. OTTO HAUPT. Mentre è stato conservato, nella trattazione, lo stile particolarmente scorrevole e attraente proprio del KLEIN, e il suo ordinamento della materia, si è però procurato da parte dell'HAUPT di aggiornare e coordinare la trattazione stessa con le più recenti ricerche, mediante un gran numero di interessantissime osservazioni e complementi, raccolti in fondo al volume, che ne aumentano ancora il pregio. *l. f.*

F. SEVERI: *Lezioni di Analisi*. Vol. I, N. Zanichelli, 1933-XII (pp. VIII+434).

L'opera di S. E. SEVERI, che ora vede la luce, viene a inserirsi naturalmente in quella sistemazione classica e insieme originale della matematica moderna, da lui intrapresa, e della quale i suoi libri di testo per le scuole medie costituiscono il primo anello, mentre il 2° volume di queste « Lezioni di Analisi » e il suo « Trattato di geometria algebrica » (di cui abbiamo per ora il 1° volume) dovrebbero costituirne gli anelli successivi.

Oltre le doti naturali di particolare limpidità ed eleganza, da tutti ben conosciute all'A. del presente libro, attrae il lettore l'originalità spontanea con cui vengono esposte cose tanto note: il nuovo dell'opera non consiste infatti in neologismi inutili, e quindi dannosi (come bene avverte l'A. nella prefazione), o in cambiamenti fatti solo per distinguersi in qualche modo dalle trattazioni solite, bensì in quella continua semplificazione dei concetti e delle dimostrazioni, in quel maggior rigore e più completo coordinamento dell'intera materia, che costituiscono la direzione naturale di sviluppo verso cui la Matematica moderna si è andata man mano evolvendo, per opera dei grandi Maestri, in forme sempre più semplici e perfette. Quanto all'ampiezza della trattazione, il problema di contemperare in uno stesso libro le esigenze degli allievi ingegneri con quelle degli studenti di matematica pura è stato felicemente risolto distribuendo la materia in una parte fondamentale (stampata in carattere medio), che viene a costituire l'ossatura dell'opera, e in un numero grandissimo di osservazioni, complementi varî, note storiche ed esercizi (stampati in carattere più piccolo), alla fine di ciascun capitolo o paragrafo, nei quali si dànno nuovi concetti, si accennano applicazioni, si tratteggiano per sommi capi intere teorie, al fine di aprire, come dice l'A. nella prefazione, « molte finestre nelle direzioni più varie dell'immenso orizzonte matematico ».

Gli argomenti trattati sono: Cap. I: *Calcolo combinatorio* (nei Complementi è tratteggiata la teoria dei gruppi di sostituzioni, e sono accennati i concetti del calcolo delle probabilità e del calcolo delle differenze finite). – Cap. II: *Determinanti, equazioni e forme lineari* (nei Complementi: studio di determinanti particolari, cenni sulle sostituzioni lineari, loro moltiplicatori ed equazione caratteristica, ecc.). – Cap. III: *Numeri reali* (nei Complementi: considerazioni critiche e storiche sui varî postulati, sulla teoria degli insiemi, sulle frazioni continue, ecc.). – Cap. IV: *Numeri complessi* (nei Complementi: indicatore di Gauss, determinanti circolanti. quaternioni e numeri complessi a più unità, ecc.). – Cap. V: *Funzioni e limiti* (nei Complementi: discontinuità di 1ª e 2ª specie, estensione dei teoremi di Bolzano e di Weierstrass e altri alle funzioni di più variabili, principio di Zermelo, teorema di Pincherle–Borel, concetto di semicontinuità del Baire; concetto di omeomorfismo e cenni di topologia o « Analisys situs », ecc.). – Cap. VI: *Derivate e differenziali delle funzioni di una variabile* (nei Complementi: cenni sulle linee topologiche e intuitive, applicazioni e esercizi varî). – Cap. VII: *Serie numeriche e serie di Taylor* (nei Complementi: cenni sulle serie asintotiche, sommazione delle serie non convergenti di Cesàro, Borel, ecc., teoria delle serie doppie, dei prodotti infiniti, delle frazioni continue). – Cap. VIII: *Nozioni preliminari relative agli integrali.* – Cap. IX: *Generalità sulle funzioni algebriche* (particolarmente notevoli le proprietà dei polinomi in più variabili, la digressione sui concetti di « generico » e « particolare » nell'Algebra, la teoria generale dell'eliminazione e la trattazione esauriente del teorema di Bezout e, nei Complementi, i cenni di Geometria degli iperspazi, l'interpretazione geometrica del metodo d'eliminazione di Kronecker e di varie entità algebriche, il criterio di compatibilità di Plücker–Clebsch, con una recente dimostrazione dell'A., i cenni sugli invarianti e covarianti, sui problemi della quadratura del cerchio, della trisezione dell'angolo, duplicazione del cubo, ecc.).

In conclusione, non soltanto gli studenti del 1° anno di matematica e gli allievi ingegneri troveranno nel libro del SEVERI una guida sicura nello studio dell'Analisi e una fonte ricchissima di informazioni, ma anche, più in generale, tutti gli studiosi di matematica vi troveranno infine soddisfatti i propri desideri di armonica completezza e quelle dimostrazioni di teoremi generali, di solito dimostrati solo in casi ristretti, che occorre poi applicare invece, in tutta generalità, nelle teorie più elevate dell'Analisi e della Geometria; l'ultimo Capitolo costituisce precisamente, sotto questo riguardo, l'esempio di una fondazione, finalmente esauriente e completa, dell'intera Geometria algebrica.

LUIGI FANTAPPIÈ

G. JULIA, *Essai sur le développement de la théorie des fonctions de variables complexes.* (Conférence faite le Mardi 6 septembre 1932 au Congrès Intern. des Mathématiciens à Zurich et insérée aux « Comptes rendus » de ce Congrès). Paris, Gauthier–Villars, 1933 (pp. VIII +53).

È l'interessante conferenza fatta dal prof. JULIA (dell'Università di Parigi) al Congresso internazionale di Zurigo del settembre 1932. In essa vengono lumeggiati i varî indirizzi di CAUCHY, RIEMANN, WEIERSTRASS, BOREL (funzioni quasi analitiche) ecc., e le importanti connessioni della teoria delle funzioni di variabile complessa con gli altri campi dell'Analisi. *l. f.*

R. ESTÈVE et H. MITAULT: *Cours d'Algèbre, à l'usage des Classes de 3ème, 2de, et 1ère de l'enseignement secondaire.* Paris, Gauthier-Villars, 1933. (Quattro volumi di 110, 162, 170 e 73 pagine).

Sebbene il « Bollettino » non pubblichi, di norma, recensioni di libri di testo di matematiche elementari, pure non sembra fuori di luogo un cenno di questa opera, ispirata da un metodo che si discosta notevolmente da quello seguito nelle nostre scuole, ma in cui, appunto perciò, i nostri insegnanti potranno trovare materia ad utili riflessioni e confronti. Il primo volumetto, destinato alla classe detta *troisième,* equivalente alla nostra prima liceale, si inizia colla introduzione dei numeri relativi, detti poco propriamente dagli AA. numeri algebrici: introduzione corredata da esempi pratici, adatti a rendere familiare ai giovani studenti il concetto, per loro nuovo, di numeri con segno. È da notarsi che fino da principio è introdotta (pag. 21) la definizione di vettore. Segue, con trattazione assai minuziosa, la teoria e la pratica del calcolo letterale, indi lo studio delle equazioni numeriche di primo grado ad una e a due incognite. Il secondo volume, per una classe corrispondente alla nostra seconda liceale ed intitolato « il primo grado », dopo una introduzione sulla somma e sottrazione di vettori paralleli ad un asse, sul moto rettilineo ed uniforme ed un cenno sulle coordinate cartesiane, è dedicato quasi per intero allo studio delle equazioni, inequazioni e sistemi di primo grado e alla variazione e rappresentazione grafica della funzione lineare. Il terzo volume, dal sottotitolo « il secondo grado », si rivolge ad una classe equivalente alla terza liceale; vi è discorso diffusamente e con continuo ricorso ad esercizi, dell'equazione e delle inequazioni di secondo grado, della variazione studiata anche graficamente del trinomio di secondo grado e dei sistemi riducibili al secondo grado. Chiude il libro una trattazione sommaria delle progressioni e dei logaritmi decimali con applicazione a questioni di interessi composti. Infine il quarto volume, destinato ad una classe postliceale chiamata di « filosofia », tratta in modo elementare delle derivate, della loro applicazione allo studio della variazione delle funzioni, delle primitive e della valutazione di alcune aree semplici.

Qcesto libro di testo, che, qualora si ammetta il punto di vista e lo spirito dei programmi scolastici francesi, può dirsi egregiamente redatto, si discosta notevolmente dai nostri, generalmente ispirati ad un più organico pensiero scientifico. Tuttavia, come già si è accennato, la sua lettura potrebbe giovare ai nostri insegnanti medi, sia per opportuni raffronti, sia per alcuni utili suggerimenti. *(u)*