BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARIO VILLA

Intorno ai fili rettilinei

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 12 (1933), n.5, p. 317–320.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_5_317_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_5_317_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1933.

Intorno ai fili rettilinei.

Nota di MARIO VILLA (a Pavia).

Sunto. - *L'Autore, premesse alcune nozioni fondamentali sui fili rettilinei, si occupa dei fili di genere algebrico 1.*

1. Nella geometria iperalgebrica della retta esistono due specie di enti: quelli di dimensione reale 1, formati da ∞^1 punti, cioè i fili ⁽¹⁾, e gli enti composti da un numero finito di punti, ossia gli ordinari enti algebrici. Questi ultimi sono intersezioni di fili.

Ad un filo rettilineo è associata una involuzione algebrica I_n^δ , e fra i gruppi di punti di I_n^δ il filo subordina un'antipolarità Ω , così che il filo stesso è il luogo dei punti comuni ai gruppi di I_n^δ e ai loro omologhi in Ω ⁽²⁾. L'ordine n di I_n^δ , ovvero l'ordine del connesso (involutorio) determinato da I_n^δ e da Ω (connesso congiunto al filo) ⁽³⁾, è un invariante del filo per proiettività e anti-proiettività, ed è l'ordine di questo. Siccome un connesso algebrico

⁽¹⁾ C. SEGRE, *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici*. « Math. Ann. », vol. 40, p. 437, 1892.

⁽²⁾ Ciò rientra, come caso particolare, nella nozione di sistema associato e di antipolarità subordinata, introdotta per ogni varietà ipe.algebrica V_{2r-1} di dimensione massima di S , nel mio lavoro di prossima pubblicazione: *Connessi algebrici, iperalgebrici e varietà iperalgebriche di dimensione massima*. Questo lavoro si richiamerà con N.

⁽³⁾ Vedi: N.

di ordine n fra i punti di una retta è individuato da $n(n+2)$ coppie di punti corrispondenti, altrettanto avviene pel connesso congiunto, prodotto di un connesso algebrico e del coniugio. Sicchè pel filo, luogo dei punti uniti di questo connesso si conclude: è *unico il filo di ordine n passante per $n(n+2)$ punti generici della retta.*

Il numero δ ($0 < \delta \leq n$), dimensione complessa di I_n^δ , che dirò *genere algebrico* del filo, è un invariante di questo per trasformazioni razionali e antirazionali (4) (5).

2. In ciò che segue mi limito ai fili di genere algebrico 1. Ω è qui un'antinvoluzione fra i gruppi di I_n^1 . Entro I_n^1 i gruppi uniti in Ω formano una catena semplice (la catena fondamentale di Ω), e i punti di questi gruppi compongono il filo. Rileviamo che *il determinante di Ω è negativo* giacchè ciò è quanto occorre e basta perchè Ω possenga catena.

Siano $u=0$, $v=0$ due gruppi (distinti) di I_n^1 omologhi in Ω . Il filo si ottiene eliminando i parametri λ , μ fra le due I_n^1 sovrapposte $u + \lambda v = 0$, $u + \mu v = 0$, e $\Omega(\lambda\bar{\mu} = k)$ (6), ed è quindi $\frac{u\bar{u}}{v\bar{v}} = k$, con k costante, ossia

$$(1) \quad \text{mod } \frac{\prod_1^n (z - z_i)}{\prod_1^s (z - \beta_j)} = \text{costante}$$

— z ascissa del punto variabile sulla retta; z_i , β_j costanti; $0 \leq s \leq n$ (7). Essendo $P_1, P_2, \dots, P_n$ i punti di $u=0$, $Q_1, Q_2, \dots, Q_s, \dots, Q_n$ quelli di

(4) Anche per un altro invariante del filo: la *specie*.

(5) Pel filo si ha poi un *genere*, che dirò *iper-algebrico* — il genere della curva o rigata reale algebrica immagine del filo nella rappresentazione sul piano, o sulla sfera, o sulla congruenza lineare — invariante del filo per trasformazioni ipercremoniane (cfr. la mia Nota: *Sulle trasformazioni pseudocremoniane*, « Rend. del Seminario Matematico di Padova », N. 3, 4, 1933).

(6) Si denota con $\bar{\varphi}$ la funzione che si ottiene ponendo per ogni coefficiente e per ogni variabile di una funzione φ il numero complesso coniugato.

(7) Per $s < n$, $n-s$ punti di $v=0$ cadono nel punto improprio O_∞ (il che esclude che il filo passi per O_∞). Escludiamo che anche fra i punti di $u=0$ compaia O_∞ perchè altrimenti O_∞ sarebbe punto base di I_n^1 . Noi supponiamo invece I_n^1 priva di punti base perchè se ne avesse h il filo si spezzerebbe nel gruppo di questi h punti e in un filo di ordine $n-h$.

$v=0$ ($Q_{i+1}, \dots, Q_n \equiv$ nel punto improprio O_∞), e V il punto variabile sul filo, dalla (1) otteniamo:

Fra il punto variabile V sul filo e due gruppi qualsiasi, purchè distinti, di I_n^1 omologhi in Ω sussiste la relazione

$$(2) \quad \text{mod} \frac{VP_1 \cdot VP_2 \cdot \dots \cdot VP_n}{VQ_1 \cdot VQ_2 \cdot \dots \cdot VQ_s} = \text{costante} \text{ (8) (9)}.$$

Possiamo evitare la distinzione di punti Q propri e impropri prendendo sulla retta n punti $S_1, S_2, \dots, S_n$ di cui solo i primi m ($0 \leq m \leq s$) cadono in O_∞ ($S_i \neq P_i, Q_i; i=1, 2, \dots, n$). Moltiplicando invece per $\text{mod} \frac{\prod_{i=1}^m S_i Q_i}{\prod_{i=m+1}^n S_i P_i}$ ($p=m+1, \dots, s; q=m+1, \dots, n$) la (2) diviene

$$(3) \quad \text{mod} \prod_{i=1}^n (VS_i P_i Q_i) = \text{costante}.$$

Prendendo per punti S_i i punti di un gruppo qualsiasi di I_n^1 , oppure quelli dello stesso gruppo $u=0$, ecc. la (3) dà varie proprietà dei nostri fili. Così ponendo $S_i \equiv V'$, essendo V' un punto variabile o fisso del filo, si ha:

Fra due punti variabili V, V' sul filo e due gruppi di I_n^1 omo-

(8) Il più semplice esempio di filo si ha nella totalità dei punti reali della retta o, più in generale, nelle catene rettilinee, cioè nei fili di 1° ordine e quindi di genere algebrico 1. Alla catena è associata una I_1^1 , ossia l'assieme dei punti della retta, sicchè è il luogo dei punti uniti dell'antivoluzione Ω . Orbene per la (2) l'immagine della catena sul piano reale è un cerchio rispetto al quale i punti immagine di P_1, Q_1 sono inversi, in accordo col fatto che un'antivoluzione della retta si rispecchia in un'inversione del piano reale. Essendo l'immagine di una catena un cerchio, il birapporto di quattro punti della catena è reale, ecc.. (Cfr. C. SEGRE, *Un nuovo campo di ricerche geometriche*, « Atti di Torino », n. 18. vol. 25. 1890).

(9) Se la I_n^1 possiede un punto nuplo in O_∞ , prendendo $Q_i \equiv O_\infty$, la (2) dà

$$\text{mod} VP_1 \cdot VP_2 \cdot \dots \cdot VP_n = \text{costante}.$$

Per $n=1$ l'immagine di P_1 è dunque il centro del cerchio immagine della catena. Per $n=2$ l'immagine del filo è un'ovale di CASSINI coi fuochi nelle immagini di P_1, P_2 . L'ovale è poi una lemniscata di BERNOULLI solo quando il punto doppio proprio di I_2^1 è unito in Ω .

Le quartiche bicirculari immagini di fili di 2° ordine e di genere algebrico 1 sono quindi le trasformate da una affinità circolare (di 1ª specie) del MÖBIUS (sostanzialmente da un'inversione) degli ovali di CASSINI giacchè con una proiettività, vale a dire con una sostituzione lineare conforme (di 1ª specie) della variabile, si può trasportare uno dei punti doppi di I_2^1 in O_∞ .

loghi in Ω — o anche fra questi due gruppi, un punto fisso V' sul filo e il punto variabile V su questo — esiste il legame

$$\text{mod } \prod_1^n (VV'P_iQ_i) = 1.$$

3. Dato nel piano reale un gruppo g_1 di n punti (propri), e un gruppo g_2 di m punti (propri) ($0 \leq m \leq n$) — i punti di uno stesso gruppo essendo distinti o comunque coincidenti, e i punti di g_2 essendo tutti diversi da quelli di g_1 — consideriamo, per $m > 0$, la curva C luogo dei punti P per cui il rapporto del prodotto delle distanze di P dai punti di g_1 e il prodotto delle distanze di P dai punti di g_2 uguaglia una data costante (positiva), e, per $m = 0$, la curva C luogo dei punti P per cui è costante il prodotto delle distanze di P dai punti di g_1 .

Orbene, siccome per la (2) C è immagine di un filo di ordine n e di genere 1, considerando sul piano l'immagine (I_n^1) di I_n^1 e la corrispondenza biunivoca — che dirò *inversione* — determinata da Ω fra i gruppi di (I_n^1) , si deduce che C è composta dai punti dei gruppi di (I_n^1) uniti nell'inversione, e che tutte (e sole) le coppie di gruppi (distinti) di (I_n^1) omologhi nell'inversione generano C in modo analogo alla coppia particolare data g_1, g_2 ⁽¹⁰⁾.

Siamo così pervenuti ad una estensione dell'inversione rispetto al cerchio che è la più semplice delle curve C . E la classe delle curve C è molto vasta: già per $n = 2$ si hanno ovali di CASSINI, ipocicloidi di STEINER, chiocciole di PASCAL, ecc..

(¹⁰) Se il filo corrispondente a C non passa per O_∞ , la C è di ordine $2n$ ed ha nei punti ciclici due punti n -upli. L'omologo nell'inversione del gruppo di (I_n^1) formato da meno di n punti (gruppo che svanisce addirittura quando la I_n^1 ha in O_∞ punto n -uplo) gode di proprietà particolari e può dirsi *gruppo centrale* di (I_n^1) . Per $n = 1$ esso è il centro del cerchio, per $n = 2$, quando O_∞ è punto doppio di I_2^1 , esso è formato dai due fuochi dell'ovale di CASSINI, ecc.. Se il filo corrispondente a C passa per O_∞ , l'ordine di C è $< 2n$, e il gruppo di (I_n^1) formato da meno di n punti è unito nell'inversione, sicchè non si ha più un gruppo centrale.