Bollettino Unione Matematica Italiana

Paolo Cattaneo

Su una curva covariante del sistema di una retta e di una cubica complanari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **12** (1933), n.5, p. 313–317.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_5_313_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1933.

Su una curva covariante del sistema di una retta e di una cubica complanari.

Nota di Paolo Cattaneo (a Padova).

Sunto. - *Prese su un piano una retta* r *ed una cubica* C_3, *sia* Q *il tangenziale del punto generico* P della C_3 e sia R *l'intersezione delle rette* r e PQ. *Si considera la curva generata dal coniugato armonico di* R *rispetto ai due punti* P e Q.

1. Siano (²), in coordinate proiettive omogenee,

(1) $$\Sigma_h A_h x_h = 0$$

ed

(2) $$f = a_x^3 = b_x^3 = \ldots = 0$$

le equazioni di r e di C_3.

Sia $P(x)$ un punto generico della C_3; sia $Q(y)$ il suo tangenziale; sia $T(z)$ l'intersezione della retta PQ con la retta unità, di equazione $\Sigma_h z_h = 0$.

Essendo $a_x^2 \cdot a_z = \Sigma_h a_h \cdot a_x^2 \cdot z_h = 0$, si ha

$$z_i = (a_{h+1} - a_{h+2}) a_x^2 \qquad [i = 1, 2, 3]$$

ed

$$y_i = \alpha x_i + \beta z_i ;$$

$$a_y^3 = \alpha^3 \cdot a_x^3 + 3\alpha^2\beta \cdot a_x^2 \cdot a_z + 3\alpha\beta^2 \cdot a_x \cdot a_z^2 + \beta^3 \cdot a_z^3 = 0 ;$$

$$3\alpha \cdot a_x \cdot a_z^2 + \beta \cdot a_z^3 = 0 ; \quad \alpha = a_z^3, \quad \beta = -3 a_x \cdot a_z^2 ;$$

$$a_z = b_x^2 \Sigma_h a_h (b_{h+1} - b_{h+2}) ;$$

$$\begin{aligned} y_i = a_z^3 \cdot x_i - 3a_x \cdot a_z^2 \cdot z_i = a_z^2 (x_i a_z - 3 a_x z_i) = \\ = b_x^2 \cdot c_x^2 \cdot d_x^2 \Sigma_{hk} a_{hk} (b_{h+1} - b_{h+2})(c_{k+1} - c_{k+2}) \cdot \\ \cdot [x_i \Sigma_l a_l (d_{l+1} - d_{l+2}) - 3(d_{i+1} - d_{i+2}) a_x]. \end{aligned}$$

Sia ora $R(t)$ l'intersezione di r con PQ e sia $S(\xi)$ il coniugato armonico di R rispetto a P e Q,

(²) Poniamo semplicemente Σ invece di $\sum_1^3$.

Posto $t_i = \lambda x_i + \mu y_i$ e quindi $\xi_i = \lambda x_i - \mu y_i$, si ha

$$\Sigma_h A_h t_h = \lambda \Sigma_h A_h x_h + \mu \Sigma_h A_h y_h = 0; \quad \lambda = \Sigma_h A_h y_h; \quad \mu = - \Sigma_h A_h x_h;$$

$$\begin{aligned} \xi_i &= \Sigma_j A_j (x_i y_j + x_j y_i) = \\ &= b_x{}^2 \cdot c_x{}^2 \cdot d_x{}^2 \Sigma_{hk} a_{hk} (b_{h+1} - b_{h+2})(c_{k+1} - c_{k+2}) \cdot \\ &\cdot \Sigma_j A_j \left\{ \begin{array}{l} 2x_i x_j \Sigma_l a_l (d_{l+1} - d_{l+2}) - \\ 3a_x [(d_{j+1} - d_{j+2}) x_i + (d_{i+1} - d_{i+2}) x_j \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Indicando con indici le derivazioni della forma cubica f, si ha

$$f_h = 3a_h \cdot a_x{}^2, \quad f_{hk} = 6a_{hk} \cdot a_x$$

e le relazioni precedenti possono scriversi anche così:

$$\text{(3)} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_i = 2x_i \Sigma_{hkl} a_{hkl} (f_{h+1} - f_{h+2})(f_{k+1} - f_{k+2})(f_{l+1} - f_{l+2}) - \\ \qquad - (f_{i+1} - f_{i+2}) \Sigma_{hk} f_{hk} (f_{h+1} - f_{h+2})(f_{k+1} - f_{k+2}). \end{array} \right.$$

$$\text{(4)} \quad \xi_i = \Sigma_j A_j \left[\begin{array}{c} 4x_i x_j \Sigma_{hkl} a_{hkl} (f_{h+1} - f_{h+2})(f_{k+1} - f_{k+2})(f_{l+1} - f_{l+2}) - \\ [(f_{j+1} - f_{j+2}) x_i + (f_{i+1} - f_{i+2}) x_j] \Sigma_{hk} f_{hk} (f_{h+1} - f_{h+2})(f_{k+1} - f_{k+2}) \end{array} \right].$$

2. Supponiamo la C_3 non cuspidata e prendiamo per retta unità una passante per tre flessi, per lati del triangolo fondamentale le corrispondenti tangenti d'inflessione.

Si ponga:

$$\begin{array}{ll} s_1 = x_1 + x_2 + x_3, & \\ s_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1, & \Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}. \\ s_3 = x_1 x_2 x_3; & \end{array}$$

Al posto della (2) abbiamo

$$\text{(2')} \quad f = s_1{}^3 + 6ms_3 = 0.$$

Si ha dunque

$$a_{hhh} = a_{hhk} = 1, \quad a_{123} = 1 + m;$$

$$f_h = 3s_1{}^2 + 6mx_{h+1}x_{h+2}, \quad f_{h+1} - f_{h+2} = 6mx_h(x_{h+2} - x_{h+1});$$

$$f_{hh} = 6s_1, \quad f_{hh+1} = 6s_1 + 6mx_{h+2}, \quad f_{hh+2} = 6s_1 + 6mx_{h+1}.$$

Sostituendo nella (3) e sopprimendo il fattore $2 \cdot 6^4 m^4 s_3$, si trova

$$\text{(3')} \quad y_i = [(3s_2 - s_1{}^2)(x_{i+1} - x_{i+2}) - \Delta] x_i;$$

donde si ha

$$\text{(4')} \quad \begin{aligned} \xi_i &= \Sigma_j A_j (x_i y_j + x_j y_i) = \\ &= (3s_2 - s_1{}^2) x_i \Sigma_j A_j (x_{j+1} - x_{j+2}) x_j + [(3s_2 - s_1{}^2)(x_{i+1} - x_{i+2}) - 2\Delta] x_i \Sigma_j A_j x_j. \end{aligned}$$

Le ξ_i sono dunque, in generale, funzioni di 5° grado delle x_i e di quì scende ovviamente che la curva generata dal punto S è di ordine $3 \cdot 5 = 15$.

L'ordine si abbassa a $3 \cdot 4 = 12$, se la retta r è una tangente d'inflessione, oppure una retta passante per tre flessi. Nel 1° caso infatti possiamo supporre $A_1 = 1$, $A_2 = A_3 = 0$ e le (4') divise per x_1, danno

$$\xi_i = (3s_2 - s_1^2)(x_2 - x_3)x_i + [(3s_2 - s_1^2)(x_{i+1} - x_{i+2}) - 2\Delta]x_i ;$$

nel 2° caso possiamo supporre $A_1 = A_2 = A_3 = 1$ e le (4') divise per s_1, danno

$$\xi_i = [(3s_2 - s_1^2)(x_{i+1} - x_{i+2}) - 2\Delta]x_i .$$

3. Notevole è il caso particolare in cui la C_3 ha un nodo.

Abbiamo allora [1] $m = -4{,}5$, la (2) diventa $s_1^3 = 27s_3$ ed è facile vedere che, indicando con ω_1, ω_2, ω_3 le tre radici cubiche dell'unità, possiamo porre

$$x_i = (t + \omega_i)^3 \qquad [i = 1, 2, 3].$$

Sia t_0 il parametro del punto $Q(y)$ tangenziale del punto $P(x)$, di parametro t. Abbiamo

$$\begin{vmatrix} (t+\omega_1)^3 & (t+\omega_1)^2 & (t_0+\omega_1)^3 \\ (t+\omega_2)^3 & (t+\omega_2)^2 & (t_0+\omega_2)^3 \\ (t+\omega_3)^3 & (t+\omega_3)^2 & (t_0+\omega_3)^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Sottragghiamo dalla 3ª colonna la 1ª; dividiamo per $t_0 - t$ la nuova colonna così ottenuta; sottragghiamo poi da essa la 2ª co-

[1] Cfr. le mie Note: *Sulla caylejana di una cubica piana*, (« Giornale di Matematiche di Battaglini », 1932) e *Sulla cubica nodata*, (« R. Istituto Lombardo », adunanza del 6 luglio 1933).

Giova quì osservare che, se la C_3 non è razionale, posto $\rho = \sqrt[3]{2\lambda : (2\lambda - 9)}$ e indicando con α ed α^2 le due radici cubiche complesse dell'unità, con le formule di trasformazione

$$x_1 = \rho y_1 + y_2 + y_3, \quad x_2 = \rho y_1 + \alpha y_2 + \alpha^2 y_3, \quad x_3 = \rho y_1 + \alpha^2 y_2 + \alpha y_3$$

si ottiene ovviamente, dalla $s_1^3 = 6\lambda s_3$, la $y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 - 3\rho y_1 y_2 y_3 = 0$.

Fra λ e il parametro m della forma canonica classica c'è dunque la relazione $m = -\rho : 2$ e per gli invarianti fondamentali della C_3 valgono quindi le formule

$$S = 24m(m^3 - 1) = 27\rho(\lambda - 4) : (2\lambda - 9),$$
$$T = 6(8m^6 + 20m^3 - 1) = -81(\lambda^2 - 6\lambda + 6) : (2\lambda - 9)^2.$$

Per il discriminante si ha poi l'espressione

$$R = T^2 - \frac{1}{6}S^3 = 162^2 : (9 - 2\lambda)^3.$$

lonna, moltiplicata per 3; dividiamo ancora per $t_0 - t$. Si ottiene

$$\begin{vmatrix} (t+\omega_1)^3 & (t+\omega_1)^2 & t_0+2t+3\omega_1 \\ (t+\omega_2)^3 & (t+\omega_2)^2 & t_0+2t+3\omega_2 \\ (t+\omega_3)^3 & (t+\omega_3)^2 & t_0+2t+3\omega_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Sottraendo dalla 2ª [3ª] riga la 1ª e dividendo poi per $\omega_2 - \omega_1$ [$\omega_3 - \omega_1$] si ottiene

$$\begin{vmatrix} (t+\omega_1)^3 & (t+\omega_1)^2 & t_0+2t+3\omega_1 \\ 3t^2-3\omega_3 t & 2t-\omega_3 & 3 \\ 3t^2-3\omega_2 t & 2t-\omega_2 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

donde, sottraendo dalla 3ª riga la 2ª e dividendo per $\omega_3 - \omega_2$, si ha

$$\begin{vmatrix} (t+\omega_1)^3 & (t+\omega_1)^2 & t_0+2t+3\omega_1 \\ 3t^2-3\omega_3 t & 2t-\omega_3 & 3 \\ 3t & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

e quindi

$$-(t_0+2t+3\omega_1)3t^2 = 3(t+\omega_1)^2(\omega_1-2t) = 3(1-3\omega_1 t^2 - 2t^3),$$
$$t^2 t_0 = -1.$$

Si ha dunque $y_i = (t_0 + \omega_i)^3$ e quindi

$$y_i = (\omega_i t^2 - 1)^3 = (t^2 - \omega_i^2)^3,$$
$$\xi_i = \Sigma_j A_j[(t+\omega_i)^3 \cdot (t^2-\omega_j^2)^3 + (t+\omega_j)^3 \cdot (t^2-\omega_j^2)^3] =$$
$$= (t+\omega_i)^3 \Sigma_j A_j[(t^2-\omega_j^2)^3 + (t-\omega_i)^3 \cdot (t+\omega_j)^3].$$

Scende tosto di quì che, nel caso particolare ora considerato, la curva generata dal punto S è, in generale, razionale d'ordine 9; e che l'ordine è 6 se la retta r è una tangente d'inflessione.

È facile poi vedere che l'ordine è 6 anche quando r è la retta dei flessi (di equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 0$) oppure una delle due tangenti nodali (di equazioni $\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3$ ed $\omega_1 x_1 + \omega_3 x_2 + \omega_2 x_3 = 0$).

4. Se la C_3 è cuspidata, ponendo la cuspide per punto $x_1 = x_2 = 0$, il flesso per punto $x_1 = x_3 = 0$, la tangente cuspidale per retta $x_2 = 0$, la tangente d'inflessione per retta $x_3 = 0$, possiamo porre

$$x_1^3 + 3x_2^2 x_3 = 0; \quad x_1 = -3t^2, \quad x_2 = -3t^3, \quad x_3 = 1;$$

e si trova ovviamente (¹) $t_0 = -t:2$; donde si ha

$$y_1 = -3t_0^2 = -3t^2:4, \quad y_2 = -3t_0^3 = 3t^3:8, \quad y_3 = 1;$$
$$y_1 = -6t^2 = 2x_1, \quad y_2 = 3t^3 = -x_2, \quad y_3 = 8x_3.$$

(¹) Cfr. la mia Nota: *Esercizi sulle cubiche piane razionali.* (« Bollettino di Matematica » di Conti, 1932), ponendo in essa

$$a = 1, \quad b = c = h = k = 0, \quad l = -3.$$

Scende di quì che

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \Sigma_j A_j(x_1 y_j + x_j y_1) = 4A_1 x_1^2 + A_2 x_1 x_2 + 10 A_3 x_1 x_3, \\
\xi_2 &= \Sigma_j A_j(x_2 y_j + x_j y_2) = A_1 x_1 x_2 - 2A_2 x_2^2 + 7A_3 x_2 x_3, \\
\xi_3 &= \Sigma_j A_j(x_3 y_j + x_j y_3) = 10A_1 x_1 x_3 + 7A_2 x_2 x_3 + 16A_3 x_3^2.
\end{aligned}$$

La linea generata dal punto S è ora, in generale, razionale d'ordine 6.

Essa è però una cubica, razionale, se la retta r è la tangente cuspidale ($A_1 = A_3 = 0$), oppure è la tangente d'inflessione ($A_1 = A_2 = 0$), oppure è la congiungente il flesso con la cuspide ($A_2 = A_3 = 0$). Queste tre cubiche hanno per equazioni, rispettivamente,

$$28 \cdot \xi_1^3 + 3\xi_2^2 \xi_3 = 0, \quad 98 \cdot \xi_1^3 + 375 \cdot \xi_2^2 \xi_3 = 0, \quad 5\xi_1^3 + 96 \cdot \xi_2^2 \xi_3 = 0:$$

esse sono tutte tre cuspidate ed hanno in comune con la C_3 la cuspide, il flesso e le relative tangenti.