BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

RENATO CACCIOPPOLI

Sulle funzioni meromorfe di due variabili complesse

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **12** (1933), n.5, p. 309–313.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_5_309_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_5_309_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1933.

Sulle funzioni meromorfe di due variabili complesse.

Nota di R. CACCIOPPOLI (a Padova).

Sunto. - *Una funzione di due variabili è meromorfa in un campo quando ivi meromorfa, sotto opportune condizioni, in ognuna delle variabili separatamente. Si applica questo risultato allo studio dell'andamento di una funzione nell'intorno di un punto di una superficie singolare essenziale isolata, e della distribuzione dei punti singolari essenziali.*

1. Si sa che una funzione delle due variabili complesse x, y , olomorfa in ognuna di queste separatamente, è olomorfa come fun-

zione di entrambe (HARTOGS⁽¹⁾). Le note analogie tra il comportamento delle funzioni olomorfe e quello delle funzioni meromorfe, tra i *prolungamenti* olomorfo e meromorfo, suggeriscono qualche estensione di questo teorema alle funzioni meromorfe. Un simile risultato si consegue, fondando sul teorema di HARTOGS stesso, abbastanza facilmente e mi sembra, se non già noto, meritevole di venire segnalato.

Un esame più accurato della quistione conduce alla seguente, come più semplice, se non più generale, formulazione del teorema:

Siano A_1, A_2 due campi dei piani x, y , A il loro prodotto nello spazio (x, y) , ed J un insieme chiuso in A , incontrato in un numero finito di punti da ogni piano x ($y = \text{cost.}$), y ($x = \text{cost.}$), fatta eccezione al più per un numero finito di questi piani. La funzione $f(x, y)$, definita⁽²⁾ in $A - J$, coincida su ogni piano x o y , non eccettuato, con una funzione meromorfa di x o di y . Allora f coincide con una funzione meromorfa in tutto il campo A .

2. Sia (x_0, y_0) un punto in A , tale che uno almeno dei due piani x, y passanti per esso, p. es. $x = x_0$, incontri l'insieme J in un numero finito di punti. Prendiamo in A_2 un cerchio B di centro y_0 che non abbia, sul piano $x = x_0$, eccettuato al più il centro, punti comuni con J . In un intorno della circonferenza di questo cerchio (sempre sul piano $x = x_0$) la funzione $f(x, y)$ risulterà, in virtù del ricordato teorema di HARTOGS, olomorfa, perchè ivi olomorfa, per ipotesi, in x ed y separatamente. Quindi l'integrale di CAUCHY, esteso alla circonferenza C di B ,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(x, \eta)}{\eta - y} d\eta$$

rappresenterà una funzione di x ed y , olomorfa per x variabile in un intorno D di x_0 , ed y in B . La differenza

$$f(x, y) - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(x, \eta)}{\eta - y} d\eta = F(x, y)$$

darà, per un qualunque valore $\bar{x}$ in D , la somma delle parti caratteristiche relative ai poli della funzione meromorfa che si identifica con $f(\bar{x}, y)$; si avrà quindi

$$(1) \quad F(x, y) = \frac{a_0 y^m + a_1 y^{m-1} + \dots + a_m}{y^n + b_1 y^{n-1} + \dots + b_n},$$

(¹) « Math. Annalen », 62.

(²) Con valori finiti.

dove le a e b sono funzioni di x , ed anche gli interi m ed n vanno riguardati come dipendenti da x . Supporremo beninteso la frazione (1) *irriducibile* per ogni x . F coinciderà inoltre per ogni y in B , tranne al più per y_0 , con una funzione meromorfa di x .

Evidentemente, si potranno determinare due valori particolari di m ed n , che corrispondano ad *infiniti* valori di x in D : sia D' l'insieme di questi. Per x in D' , i coefficienti a e b della frazione saranno determinati dalle equazioni

$$(2) \quad a_0 y_0^m + \dots + a_m = F(x, y_0)[y_0^n + \dots + b_n] \quad (i = 1, 2, \dots, m + n + 1)$$

i valori y_i attribuiti ad y essendo opportunamente scelti (generici) in un intorno di C . Ed infatti, se ciò non fosse possibile, tra i coefficienti delle equazioni (2) (analitici in x) sussisterebbe una relazione lineare a coefficienti indipendenti da y

$$z_0 y_0^m + \dots + z_m = F(x, y)[\zeta_1 y_0^{m-1} + \dots + \zeta_n],$$

per tutti i valori di x in D' (anzi in D), contrariamente all'ipotesi dell'irriducibilità della frazione (1).

Risolvendo le (2) si troverà

$$\begin{aligned} a_0 &= A_0(x), & a_1 &= A_1(x), \dots, & a_m &= A_m(x) \\ b_1 &= B_1(x), & b_2 &= B_2(x), \dots, & b_n &= B_n(x) \end{aligned}$$

essendo le A e B funzioni meromorfe in D , donde l'eguaglianza

$$F(x, y) = \frac{A_0(x)y^m + \dots + A_m(x)}{y^n + \dots + B_n(x)},$$

per x in D' , e quindi anche in D , dato il carattere meromorfo in x dei due membri. Pertanto si ha

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(x, \tau)}{\tau - y} d\tau + \frac{A_0 y^m + \dots + A_m}{y^n + \dots + B_n}$$

ovunque, in un intorno di (x_0, y_0) , l'espressione a secondo membro abbia significato (e sia definita la funzione f).

L'analisi precedente essendo applicabile a tutti i punti di A , tranne soltanto a quelli per cui entrambi i piani $x = x_0$, $y = y_0$ siano eccettuati, e che sono in numero finito si conclude, conformemente all'enunciato, che f coincide con una funzione meromorfa in tutto il campo A .

3. Indichiamo un'applicazione semplicissima del teorema precedente.

È noto che un punto singolare essenziale di una funzione di due variabili $f(x, y)$ non può nè essere isolato, nè appartenere ad

una curva singolare isolata; può però appartenere ad una superficie singolare isolata, e questa è necessariamente allora una *caratteristica*, cioè una superficie di equazione analitica

$$\varphi(x, y) = 0,$$

per cui il punto in questione può essere regolare, o multiplo, o critico. Ora ad una singolarità siffatta si può estendere il teorema di PICARD sulle singolarità essenziali isolate delle funzioni di una variabile, come segue:

Nell'intorno di un punto di una caratteristica singolare essenziale isolata una funzione $f(x, y)$ assume (infinite volte) qualunque valore finito, uno al più eccettuato.

Infatti, se così non fosse, in tutto un intorno del punto (x_0, y_0) considerato la funzione sarebbe definita fuori di un insieme J dotato delle proprietà richieste nel nostro teorema, e risulterebbe meromorfa in x ed in y separatamente; dovrebbe pertanto essere meromorfa intorno a (x_0, y_0) .

Questo risultato assume la sua forma più generale quando si supponga la caratteristica singolare isolata solo in quanto essenziale, potendo in un suo intorno la funzione presentare ancora singolarità non essenziali. Attribuendo allora ad una funzione il valore ∞ in un polo (singolarità non essenziale di prima specie) si può dire che:

Nell'intorno di un punto di una caratteristica singolare essenziale isolata una funzione presenta al più due valori eccettuati.

4. Osserviamo ancora che col ragionamento del n. 2 rimane stabilito il risultato seguente:

Se la funzione analitica $f(x, y)$ è meromorfa per $x = x_0$ ed y sul contorno C di un campo B , e se inoltre è meromorfa in B , come funzione della sola y , per un'infinità non numerabile di valori di x aventi x_0 per punto di condensazione, essa è meromorfa per $x = x_0$ e y in B .

Difatti si può in tali ipotesi, occorrendo previa moltiplicazione di f per una potenza di $x - x_0$ e deformazione infinitesima di C , supporre che f sia olomorfa per $x = x_0$ e y su C .

E più generalmente:

Una funzione analitica di x, y è meromorfa per x in A e y in B sempre che sia:

- 1°) meromorfa per x in A e y sul contorno di B ;
- 2°) meromorfa in B , come funzione di sola y , per un'infinità non numerabile di valori di x interni ad A .

Questo teorema include il più generale « teorema di continuità » per le singolarità essenziali di una funzione analitica di due variabili (1).

(1) Cfr. H. KNESER, « Jahresbericht der Deutschen Math. Ver. », 41 (1931).