Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Luisa Pelosi

Sopra alcune proprietà del minimo e massimo integrale della somma di più funzioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **12** (1933), n.5, p. 302–304.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_5_302_0>

Sopra alcune proprietà del minimo e massimo integrale della somma di più funzioni.

Nota di LUISA PELOSI (a Biella).

Sunto. - *Viene esposta una nuova dimostrazione di alcune proprietà, dovute al prof.* PICONE, *relative al minimo e massimo integrale della somma di più funzioni.*

Nel noto trattato del prof. PICONE, *Lezioni di Analisi infinitesimale* (Catania, 1923), che ha una spiccata impronta di originalità e generalità di trattazione, si trovano nuove e importanti proprietà del minimo e massimo integrale di funzioni, estesi a campi.

In questo breve scritto espongo una nuova dimostrazione, assai semplice di una proprietà riguardante il minimo e massimo integrale della somma di più funzioni.

Nell'insieme limitato A di uno spazio $S_{(r)}$, con r dimensioni, del quale indicheremo con P un punto generico, siano definite le funzioni reali $f_1(P)$, $f_2(P)$,..., $f_n(P)$, che supporremo limitate.

Indichiamo poi, col PICONE, con λ_1', λ_2',..., λ_n' i minimi integrali delle funzioni date, estesi ad A, con λ_1'', λ_2'',..., λ_n'' i loro massimi integrali, e con λ', λ'' il minimo e massimo integrale della somma delle funzioni date, estesi pure ad A.

Sussistono allora intanto le relazioni seguenti:

$$(1) \qquad \sum_1^n{}_i \lambda_i' \leq \lambda', \quad \lambda' \leq \lambda''.$$

$$(2) \qquad \lambda'' \leq \sum_1^n{}_i \lambda_i''.$$

cioè: *La somma dei minimi integrali di più funzioni non può superare il minimo integrale della somma delle funzioni, il quale non può superare il massimo integrale della somma delle funzioni stesse, il quale a sua volta non può superare la somma dei massimi integrali delle funzioni date.*

Inoltre: Se la costante c è non positiva, si ha, per una funzione qualunque:

$$(3) \qquad \int_A' cf(P)dT = c\int_A'' f(P)dT. \qquad (c \leq 0).$$

Le relazioni (1), (2), (3) risultano subito da ovvie proprietà dell'estremo inferiore e superiore di un insieme numerico, e dalla definizione di minimo integrale e di massimo integrale.

Sussistono poi ancora le importanti relazioni seguenti, dovute al prof. PICONE (op. cit., vol. I, parte II, pag. 372):

$$(4) \qquad \lambda' \leq \lambda_k' + \lambda_1'' + \lambda_2'' + \ldots + \lambda''_{k-1} + \lambda''_{k+1} + \ldots + \lambda_n'',$$

$$(5) \qquad \lambda'' \geq \lambda_k'' + \lambda_1' + \lambda_2' + \ldots + \lambda'_{k-1} + \lambda'_{k+1} + \ldots + \lambda_n';$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

cioè: *Il minimo integrale della somma di più funzioni non può superare la somma del minimo integrale di una delle funzioni coi massimi integrali di tutte le altre; e il massimo integrale della somma di più funzioni non può essere minore della somma del massimo integrale di una delle funzioni coi minimi integrali di tutte le altre.*

Il prof. PICONE stabilisce (per $n = 2$) le (4), (5), con un ragionamento diretto, ma esse si possono ricavare (per n qualunque) molto facilmente dalle (1), (2), (3), ragionando così.

Applicando la (1) si ha:

$$\int_A' [f_1(P) + \ldots + f_n(P)]dT + \int_A' \{-[f_1(P) + \ldots + f_{k-1}(P) + f_{k+1}(P) + \ldots$$

$$\ldots + f_n(P)]\} dT \leq \int_A' f_k(P)dT,$$

cioè:

$$\lambda' + \int_A^{'} \left\{ -[f_1(P) + \ldots + f_{k-1}(P) + f_{k+1}(P) + \ldots + f_n(P)] \right\} dT \leq \lambda_k',$$

applicando la (3), per $c = -1$, si può scrivere:

$$\lambda' - \int_A^{''} [f_1(P) + \ldots + f_{k-1}(P) + f_{k+1}(P) + \ldots + f_n(P)] dT \leq \lambda_k',$$

ossia:

$$\lambda' \leq \lambda_k' + \int_A^{''} [f_1(P) + \ldots + f_{k-1}(P) + f_{k+1}(P) + \ldots + f_n(P)] dT,$$

di qui, applicando la (2), segue senz'altro la (4).

Per dimostrare la (5) basta, ovviamente, applicare la (4) alle funzioni $-f_1(P)$, $-f_2(P), \ldots, -f_n(P)$ e poi tener conto della (3).