BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ANTONIO MAMBRIANI

Sulla sommazione di certe serie di potenze e su una trasformazione di Pincherle

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **12** (1933), n.5, p. 296–302.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_5_296_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_5_296_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Sulla sommazione di certe serie di potenze e su una trasformazione di Pincherle.

Nota di ANTONIO MAMBRIANI (a Bologna).

Sunto. - Si dà, con metodo semplice, la somma di una classe di serie di potenze; si nota che tale risultato discende, come caso particolare, da una notevole trasformazione del prof. PINCHERLE; si danno due esempi notevoli di questa trasformazione; si mostra, infine, che il sopradetto metodo semplice di sommazione, lievemente completato, serve anche a stabilire la detta trasformazione di Pincherle.

Parecchi Autori ⁽¹⁾ si sono occupati — ed anche recentemente — della sommazione della serie

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n \quad (m \text{ intero positivo}).$$

con particolare riferimento al caso $x=1$; non vi è però maggiore

(¹) S. FORDE and J. WOLSTENHOLME, *Solution of a question 4116*, « Educ. Times », t. XX (1874), pp. 34-36; G. DOBINSKI, *Summirung der Reihe* $\sum \frac{n^n}{n!}$ für $m=1, 2, 3, \dots$, « Grunert Arch. », Bd. LXI (1877), pp. 333-336; W. LI-GOWSKI, *Zur Summirung der Reihe* $\sum_0^{\infty} \frac{n^n}{n!}$, « Grunert Arch. », Bd. LXII (1878), pp. 334-336; G. DOBINSKI, *Eine Reihentwicklung*, « Grunert Arch. », Bd. LXIII (1879), pp. 108-110; E. CESÀRO, *Corso di Analisi algebrica*, Torino (1894), cfr. p. 466, e); J. B. D'ALMEIDA AREZ, *Duas classes de numeros*. « Teixeira J. », t. 15 (1901), pp. 3-24; E. CESÀRO, *Elementi di Calcolo infinitesimale*, Napoli (1905), cfr. p. 511, d); P. HENDLÉ, *Séries représentant 2e et 5e (question 4752, de H. Sebban)*, « Interméd. des math. », t. 25 (1918), pp. 22-23; I. J. SCHWATT, *An introduction to the operations with series*, Philadelphia (1924); A. CHIPELLINI, *Sulla serie* $\sum_1^{\infty} \frac{n^n}{n!}$, « Boll. Unione Matematica Italiana », Vol. X (1931), pp. 134-138; U. BROGGI, *Su di qualche applicazione dei numeri di Stirling*, « Rend. R. Istituto Lombardo », S. II, Vol. LXVI (1933), pp. 196-202; U. BROGGI, *Sull' iterazione dell' operazione* $x \frac{d}{dx}$, « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », S. VI, Vol. XVII (1933), pp. 696-700; G. USAI, *Sulla serie* $\sum_1^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$ e su un triangolo aritmetico, « Boll. Unione Matematica Italiana », Vol. XII (1933), pp. 131-133.

difficoltà a sommare, più in generale, la serie

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^m k_n x^n \quad (m \text{ intero positivo})$$

a mezzo della funzione $\varphi(x)$ definita dalla serie (supposta di raggio di convergenza non nullo)

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n.$$

L'oggetto della presente Nota è il seguente:

1°) Senza la pretesa di volere valutare i diversi metodi (alcuni dei quali indubbiamente interessanti) seguiti dai detti Autori, si espone [n. 1] un metodo, per eseguire le sopra nominate somministrazioni, che pare essere quello più naturale e più indicato e che mi sembra non sia stato sviluppato nel modo dovuto.

2°) Si osserva [n. 2] che i risultati ottenuti facendo tali somministrazioni discendono, come casi particolari, da una ben nota *trasformazione di Pincherle* (*). Tale trasformazione, relativa alle serie di potenze, ottenuta dal prof. PINCHERLE applicando i suoi *operatori normali*, è, a mio giudizio, notevolissima; essa si presenta come una generalizzazione della nota *trasformazione di Eulero* per le serie ed anche, più in generale, della *trasformazione di Eulero-Lindelöf*; essa servì al PINCHERLE, fra l'altro, a dare un'elegante dimostrazione dell'importante teorema di HADAMARD sulla moltiplicazione delle singolarità delle funzioni analitiche.

3°) Si danno [fine del n. 2] due esempi notevoli di simile trasformazione.

4°) Si mostra, infine [n. 3], che il metodo nominato in 1°), opportunamente generalizzato e completato, serve anche a stabilire la detta trasformazione di PINCHERLE.

1. **Sommazione di (2) a mezzo di $\varphi(x)$.** — Posto, per brevità di scrittura,

$$(4) \quad \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} a_{\nu} b_{n-\nu} = a_n \cdot b_n \quad (n=0, 1, 2, \dots);$$

(*) S. PINCHERLE, *A proposito di un recente teorema del sig. Hadamard*. « Rend. R. Acc. Scienze di Bologna », 19 febbraio 1899; *Di alcune operazioni atte ad aggiungere o togliere singolarità in una funzione analitica*. « Annali di Matem. », S. III, T. IV (1900), pp. 219-280 (cfr., in particolare, p. 242, (7)); *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'Analisi*, Bologna (1901) (cfr., in particolare, p. 159, (9); alla p. 158, fine del n. 212, il PINCHERLE formula un'osservazione che conduce, in un caso particolare, a quella fatta sopra in 2°)).

si vede facilmente che è

$$(5) \quad n^m = n^m \cdot (-1)^n \cdot 1^n.$$

Ricordando ora la definizione dei numeri $\Delta^v 0^m$ (da molto tempo studiati e detti *differenze n-esime di 0^m*):

$$\Delta^v 0^m = \sum_{\nu=0}^n (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} \nu^m = n^m \cdot (-1)^n,$$

segue da (5) la nota formula

$$(6) \quad n^m = \Delta^v 0^m \cdot 1^n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \Delta^v 0^m,$$

dove l'estremo superiore n del segno sommatorio (tenendo presente che è $\binom{n}{\nu} = 0$ per $\nu > n$, $\Delta^v 0^m = 0$ per $\nu > m$) si può sostituire con m :

$$(6') \quad n^m = \sum_{\nu=0}^m \binom{n}{\nu} \Delta^v 0^m.$$

Ponendo questa espressione di n^m in (2) e scambiando l'ordine dei due segni sommatori (dato che m non dipende da n), si ottiene subito la cercata formula di sommazione per la serie (2):

$$(7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^m k_n x^n = \sum_{\nu=0}^m \frac{\Delta^v 0^m}{\nu!} x^\nu \varphi^{(\nu)}(x),$$

dove $\varphi^{(\nu)}(x)$ indica, al solito, la derivata ν -esima della $\varphi(x)$ (definita da (3)); da cui, in particolare, per $k_n = 1^n$ e $k_n = 1/n!$, rispettivamente,

$$(8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^m x^n = \sum_{\nu=0}^m \Delta^v 0^m \cdot \frac{x^\nu}{(1-x)^{\nu+1}},$$

$$(9) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^m}{n!} x^n = e^x \sum_{\nu=0}^m \frac{\Delta^v 0^m}{\nu!} x^\nu.$$

OSSEVAZIONE 1^a. — Indicato con $\mathfrak{D}$ l'operatore $x D$ ⁽³⁾, dove $D = D_x$ è il solito simbolo di derivazione rispetto alla variabile x , da (7) si ha ⁽⁴⁾:

$$(7') \quad \mathfrak{D}^m \varphi(x) = \sum_{\nu=0}^m \frac{\Delta^v 0^m}{\nu!} x^\nu D^\nu \varphi(x),$$

⁽³⁾ Cfr. J. HADAMARD, *Thèse*, « Journal de Math. », 1892.

⁽⁴⁾ L. GALVANI, *Di alcune identità analitiche ed aritmetiche*, « Periodico di Matem. », S. III, Vol. IX (1912), pp. 202-209; I. J. SCHWARTZ, loc. cit. in (1); U. BROGGI, *Sull' iterazione ecc.*, loc. cit. in (1), formula (5).

ed in particolare da (8) e (9) si ha:

$$(8') \quad \mathfrak{D}^m \frac{1}{1-x} = \sum_{\nu=0}^m \Delta^\nu 0^m \cdot \frac{x^\nu}{(1-x)^{\nu+1}},$$

$$(9') \quad \mathfrak{D}^m e^x = e^x \sum_{\nu=0}^m \frac{\Delta^\nu 0^m}{\nu!} x^\nu.$$

OSSERVAZIONE 2^a. — Se in (7) si cambia x in e^x , si ha (5):

$$(7'') \quad D_x^m \varphi(e^x) = \sum_{\nu=0}^m \frac{\Delta^\nu 0^m}{\nu!} e^{\nu x} D_x^\nu \varphi(e^x),$$

ed analogamente — in particolare — da (8) e (9) si ha:

$$(8'') \quad D^m \frac{1}{1-e^x} = \sum_{\nu=0}^m \Delta^\nu 0^m \cdot \frac{e^{\nu x}}{(1-e^x)^{\nu+1}},$$

$$(9'') \quad D^m e^{e^x} = e^{e^x} \sum_{\nu=0}^m \frac{\Delta^\nu 0^m}{\nu!} e^{\nu x}.$$

2. La trasformazione di Pincherle. Due esempi notevoli. —

Consideriamo ora, oltre alla $\varphi(x)$ definita da (3), un'altra funzione analitica $f(x)$ definita da una serie (di raggio di convergenza non nullo)

$$(10) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

La (7) è manifestamente un caso particolare della seguente trasformazione di Pincherle:

$$(11) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n k_n x^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Delta^\nu a_0}{\nu!} x^\nu \varphi^{(\nu)}(x),$$

dove è (usando la notazione (4)) $\Delta^\nu a_0 = a_\nu \cdot \nu! (-1)^\nu$ e dove la serie del secondo membro (come ha dimostrato il PINCHERLE (6)) converge — rappresentando la funzione $F(x)$ definita dal primo membro — sotto la condizione

$$(12) \quad \left| \frac{x}{x-v} \right| < \left| \frac{u}{1-u} \right|,$$

indicando con u i punti singolari di $f(x)$ e con v quelli di $\varphi(x)$.

(6) E. CESÀRO, *Elementi di Calcolo infinitesimale*, Napoli (1905), cfr. p. 517, formula (5); J. F. STEFFENSEN, *Interpolation*, Baltimore (1927), p. 237, formula (25).

(6) Loc. cit. in (2).

Il PINCHERLE, introducendo nel secondo membro di (11) una quantità arbitraria z , ha dato anche la trasformazione

$$(11') \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n k_n x^n = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\Delta_z^v a_0}{v!} x^v D_x^v \varphi\left(\frac{x}{z}\right),$$

dove è $\Delta_z^v a_0 = a_v z^v \cdot (-1)^v$ e dove la serie del secondo membro converge — rappresentando $F(x)$ — sotto la condizione

$$(12') \quad \left| \frac{x}{x-vz} \right| < \left| \frac{u}{z-u} \right|;$$

prendendo z opportunamente si avrà in generale pel secondo membro di (11') un campo di convergenza più ampio del campo di convergenza del secondo membro di (11).

ESEMPLI. — Ecco due esempi notevoli della trasformazione (11) di PINCHERLE, dai quali discendono interessanti applicazioni e deduzioni.

1°) Si faccia $a_n \equiv \frac{1}{y+n}$, con $y \neq 0, -1, -2, \dots$ e del resto qualsiasi. È allora

$$\Delta^v a_0 = \frac{1}{y+v} \cdot (-1)^v = \frac{(-1)^v v!}{y(y+1) \dots (y+v)},$$

e la (11) diventa:

$$(13) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n x^n}{y+n} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v x^v \varphi^{(v)}(x)}{y(y+1) \dots (y+v)},$$

trasformazione che per $x=1$ e con altro metodo venne pure posta in evidenza dal prof. PINCHERLE (7).

2°) Si faccia, invece, $a_n \equiv \binom{y+n}{n}$. È allora

$$\Delta^v a_0 = \binom{y+v}{v} \cdot (-1)^v = \binom{y}{v}.$$

(7) S. PINCHERLE, *Una trasformazione di serie*, « Rend. Circolo Matem. di Palermo », T. II (1888), pp. 225-226. Il metodo usato qui dal prof. PINCHERLE si presta, con poche modifiche, a stabilire più in generale la (13) sopra scritta. Il PINCHERLE, poi, in più lavori ha studiato la forma differenziale lineare data dal secondo membro di (13); si veda, per es., *Sui limiti della convergenza di alcune espressioni analitiche*, « Rend. R. Acc. Scienze di Bologna », 29 novembre 1903, formula (9); *Una classe speciale di forme differenziali lineari d'ordine infinito*, « Memorie R. Acc. Scienze di Bologna », S. VIII, T. IV (1926), formula (10).

e la (11) diventa :

$$(14) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{y+n}{n} k_n x^n = \sum_{v=0}^{\infty} \binom{y}{v} \frac{x^v}{v!} \varphi^{(v)}(x).$$

I campi di validità del (13) e (14) risultano facilmente dalle considerazioni generali del prof. PINCHERLE sopra brevemente richiamate.

3. Deduzione della trasformazione di Pincherle. — Mostriamo ora come, generalizzando il metodo indicato al n. 1, si giunga facilmente alla (11').

Abbiamo manifestamente (generalizzando la (5) e facendo uso della notazione (4)) :

$$(15) \quad a_n = a_n \cdot \frac{(-1)^n}{z^n} \cdot \frac{1}{z^n},$$

ed essendo

$$a_n \cdot \frac{(-1)^n}{z^n} = \frac{a_n z^n \cdot (-1)^n}{z^n} = \frac{\Delta_z^n a_0}{z^n},$$

segue da (15) la formula (generalizzazione di (6)) :

$$(16) \quad a_n = \frac{\Delta_z^n a_0}{z^n} \cdot \frac{1}{z^n} = \frac{\Delta_z^n a_0 \cdot 1^n}{z^n} = \frac{1}{z^n} \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} \Delta_z^v a_0.$$

Ora, poichè la serie (10) è convergente, esisteranno due numeri positivi M e δ in modo che sia

$$|a_n| < M \delta^n \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

da cui segue subito

$$(17) \quad |\Delta_z^v a_0| < M(1 + \delta|z|)^v.$$

Se quindi nel primo membro di (11') si sostituisce l'espressione di a_n data da (16), si ha :

$$(18) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\Delta_z^v a_0}{v!} n(n-1) \dots (n-v+1) k_n \left(\frac{x}{z}\right)^n,$$

da cui, per la (17),

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{|\Delta_z^v a_0|}{v!} n(n-1) \dots (n-v+1) |k_n| \left|\frac{x}{z}\right|^n < \\ < M \sum_{n=0}^{\infty} |k_n| \frac{(2 + \delta|z|)^n}{|z|^n} x^n. \end{aligned}$$

dove il secondo membro è certo convergente per i valori x di un intorno convenientemente piccolo di $x=0$. Per tali x la serie

doppia (18) è assolutamente ed uniformemente convergente: si può, perciò, scambiare in (18) l'ordine delle due sommazioni. Con ciò s'ottiene il secondo membro della (11'), e la trasformazione di PINCHERLE resta stabilita ⁽⁸⁾.

Il PINCHERLE invece — come si sa — applicando il suo operatore normale U definito da $U(x^n) = a_n x^n$ ($n=0, 1, 2, \dots$), riesce a stabilire che è

$$19) \quad U(\varphi) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\Delta_v^2 a_0}{v!} x^v D_x^v \varphi\left(\frac{x}{z}\right);$$

successivamente mostra che il secondo membro di (19) si può ordinare secondo le potenze crescenti di x , ed effettuando un tale ordinamento Egli trova appunto la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n k_n x^n$$

del primo membro di (11').

⁽⁸⁾ Un'ulteriore generalizzazione del metodo sopra indicato sarà data in altro lavoro.