
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

SALVATORE PINCHERLE

Sull'iterazione 'dell'Operatore xD

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 12 (1933), n.5, p. 294–295.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_5_294_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_5_294_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sull' iterazione dell' Operatore $x D$.

Nota di SALVATORE PINCHERLE (a Bologna).

Sunto. - In questa Nota, premesse alcune notizie storiche, si dà per l' iterata dell' operazione $x \frac{d}{dx}$ una espressione il cui impiego è più agevole.

Indicando, come di consueto, con D l' operazione di derivazione rispetto ad una variabile x reale o complessa, l' operatore $x D$ è stato impiegato da tempo per la deduzione di svariati ed interessanti risultati nella algoritmia delle espressioni analitiche. Un primo accenno all' uso di questo operatore e delle sue iterate si trova in una breve Nota postuma di ABEL ⁽¹⁾, diretta a sommare la serie

$$\varphi(0) + \varphi(1)x + \varphi(2)x^2 + \dots$$

più tardi, ma quasi un secolo fa, uno studio esauriente ne venne fatto da GIORGIO BOOLE ⁽²⁾, che ne dedusse le applicazioni dalla relazione fondamentale

$$(xD)^m(x^s) = s^m x^s,$$

dalla quale, se $u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ e se $\varphi(z)$ è un polinomio intero o una serie di potenze in z , risulta la formula, che generalizza quella di ABEL

$$\varphi(xD)(u(x)) = \varphi(0)a_0 + \varphi(1)a_1 x + \varphi(2)a_2 x^2 + \dots$$

Recentemente vari Autori hanno ripreso a considerare l' iterazione di $x D$; ne tratta lo SCHWATT nella sua opera *an Introduction to the Operations with Series* ⁽³⁾ in cui ha principalmente in vista l' applicazione alle somme di potenze simili dei numeri naturali; uno dei casi trattati da questo A. è ripreso e completato da A. CHIPELLINI in questo stesso « Bollettino » ⁽⁴⁾; infine in una Nota avente il medesimo titolo di questa, il prof. BROGGI ⁽⁵⁾ si giova degli stessi iterati per giungere ad una espressione esplicita dei numeri di STIRLING ⁽⁶⁾.

⁽¹⁾ « Oeuvres complètes », ed. Sylow et Lie, T. II, pag. 14.

⁽²⁾ « Philosophical transactions », 1844. Cfr. R. CARMICHAEL. *Treatise on the Calculus of Operations*. London, 1855.

⁽³⁾ Pag. 81 e seguenti.

⁽⁴⁾ « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », T. X, pag. 134, 1931.

⁽⁵⁾ « Atti della R. Accad. dei Lincei », T. XVII, serie VI, pag. 696, 1933.

⁽⁶⁾ V. anche una applicazione fatta da B. LEVI, questo « Bollettino », T. XII, pag. 1, 1933.

Questo breve scritto si propone di mostrare come si possa giungere all'espressione di $x^m D^m$ in funzione di $(xD)^m$, in modo più rapido e semplice di quanto sia fatto precedentemente, in particolare dallo SCHWATT. Si riconosce immediatamente, per esempio dall'applicazione ad x^s , che le potenze di xD e gli operatori della forma $x^m D^m$ sono fra loro permutabili. Da questo fatto risulta, per una proprietà generale degli operatori lineari fra loro permutabili ⁽¹⁾, che $x^m D^m$ è sviluppabile in un polinomio ordinato per le potenze di xD . Si ponga dunque

$$x^m D^m = c_{m \cdot m}(xD)^m + c_{m \cdot m-1}(xD)^{m-1} + \dots + c_{m \cdot 1}xD;$$

applicando l'uno e l'altro membro ad x^s , si ottiene

$$s(s-1)(s-2) \dots (s-m+1) = c_{m \cdot m}s^m + c_{m \cdot m-1}s^{m-1} + \dots + c_{m \cdot 1}s, \\ c_{m \cdot m} = 1, \quad c_{m \cdot 1} = 1.$$

I coefficienti $c_{m \cdot n}$ non sono dunque altro che i cosiddetti « coefficienti di fattoriali » ⁽²⁾, soddisfacenti alla ben nota relazione ricorrente

$$c_{m+1 \cdot n} = c_{m \cdot n-1} - m c_{m \cdot n}, \quad (m \geq n).$$

Ora, dall'identità

$$e^{s \log(1+t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} t^n,$$

valida per $|t| < 1$, si deduce, ponendo

$$\log^n(1+t) = t^n + \frac{h_{n+1 \cdot n}}{n+1} t^{n+1} + \frac{h_{n+2 \cdot n}}{(n+1)(n+2)} t^{n+2} + \dots + \\ + \frac{h_{m \cdot n}}{(n+1)(n+2) \dots m} t^m + \dots$$

ed uguagliando i coefficienti di t^m nei due membri,

$$\frac{1}{m!} (s^m + h_{m \cdot m-1}s^{m-1} + h_{m \cdot m-2}s^{m-2} + \dots + s) = \binom{s}{m};$$

la $h_{m \cdot n}$ non differisce dunque da $c_{m \cdot n}$. Il « coefficiente di fattoriali » $c_{m \cdot n}$ diviso per $(n+1)(n+2) \dots m$, non è dunque altro che il coefficiente di t^m nello sviluppo di $\log^n(1+t)$. ($m \geq n$) ⁽³⁾.

⁽¹⁾ V. PINCHERLE e AMALDI, *Le operazioni distributive*, pag. 45. (Bologna, Zanichelli, 1901).

⁽²⁾ V. p. es. SCHLAEFLI, « Journal de Crelle », T. XLIII, pag. 1, 1852.

⁽³⁾ Cfr. la mia Nota: *Sopra un problema d'interpolazione*. « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », T. XVI, 1900, e L. GALVANI, « Periodico di Matematica », S. 3, T. IX, 1912.