
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ANNIBALE COMESSATTI

Sui circuiti dispari delle curve algebriche reali tracciate sopra superficie razionali

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 12 (1933), n.5, p. 289–293.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_5_289_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_5_289_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1933.

**Sui circuiti dispari delle curve algebriche reali
tracciate sopra superficie razionali.**

Nota di ANNIBALE COMESSATTI (a Padova).

Sunto. - *Osservazioni sopra un risultato della prof. PIAZZOLLA-BELOCH e generalizzazione.*

1. In due lavori abbastanza recenti la prof. M. PIAZZOLLA-BELOCH ha, con altro, rilevato, che una curva algebrica reale, *priva di punti multipli*, tracciata su di una superficie cubica generale F con 27 rette reali, *non può avere più di 7 circuiti dispari* (e che tal mas-

simo può raggiungersi con opportune curve irriducibili) mentre invece il numero dei circuiti pari non è limitato se non in funzione dell'ordine ⁽¹⁾.

La proprietà appare elegante e curiosa; volendo guardarvi un po' addentro, si è, a prima vista, distratti dalla veste topologico-proiettiva in cui essa si presenta. Ma, non appena si avverta, che, sulla F in discorso, la quale è unilatera ed ha l'ordine di connessione (numero di BETTI, mod. 2) eguale a 7 ⁽²⁾, la classe dei circuiti dispari si identifica con quella dei circuiti che invertono l'indicatrice (li diremo *circuiti unilateri*, con riferimento al fatto che danno origine ad un solo orlo) si vede che la topologia proiettiva interviene solo a rivestire una proprietà ch'è essenzialmente di topologia generale, e rientra, come modesto caso particolare, nella seguente:

Sopra una superficie unilatera d'ordine di connessione Z , posson tracciarsi, al massimo, Z circuiti unilateri a due a due non intersecantisi.

Questa proposizione, sebbene non ricorra esplicitamente nelle opere e repertori più alla mano, vi si ritrova però implicitamente negli elementi essenziali ⁽³⁾, sì da potersi ritenere senz'altro nota. La dimostrazioncina aritmetica che ne esponiamo nelle linee seguenti potrebbe pertanto apparire superflua, ove non presentasse, oltre a quello della semplicità, il vantaggio di non richiedere, per

⁽¹⁾ Vedi le due Note dell'Autrice: *Sur le nombre des branches impaires des courbes appartenant à une surface du 3^{me} ordre* [« C. R. Acc. Sc. Parigi », T. 189 (1929), p. 1226]; *Sulla configurazione delle curve situate sopra una superficie generale del 3^o ordine con 27 rette reali* [« Rendic. Palermo », T. 55 (1931), pp. 1-20].

⁽²⁾ Vedi la mia Memoria: *Sulla connessione delle superficie razionali reali* [« Annali di Mat. » (3), T. 23 (1914), pp. 215-284] n. 20.

⁽³⁾ Invero, dal teorema sul numero massimo di circuiti non intersecantisi che non rompono la connessione d'una superficie unilatera (massimo che per le superficie chiuse è precisamente Z), il quale si trova già nella Memoria di W. DYCK, *Beiträge zur Analysis Situs I* [« Math. Ann. », Bd. 32 (1888), pp. 457-512] a pag. 481, poi, ad es. nell'articolo enciclopedico di DEHN-HEEGAARD sull' *Analysis Situs* [« Enzyklop. der Math. Wiss. », III A, B. 3] a pag. 202, appena si tenga presente che un insieme qualunque di circuiti unilateri, nelle condizioni dell'enunciato, non può rompere la connessione, perchè il taglio lungo ciascuno di essi produce un solo orlo, segue che il numero di tali circuiti ha un massimo $\leq Z$. Dopo ciò non resta che procurarsi un particolare gruppo di Z circuiti nelle condizioni volute: un tal gruppo è rilevabile direttamente su qualsiasi *forma normale* (come ad es. poco appresso).

le applicazioni più semplici alle superficie razionali, in particolare al caso da cui ha preso le mosse questo discorso, l'appoggio a teoremi generali di topologia delle superficie unilateri.

2. Una superficie unilatera F , d'ordine di connessione Z , è notoriamente rappresentabile sopra una sfera S con Z punti fondamentali $P_1, P_2, \dots, P_Z$ ⁽⁴⁾. A questi rispondono sulla F altrettanti circuiti unilateri, a due a due non intersecantisi; resta dunque solo da far vedere, che, comunque si scelgano di tali circuiti, il loro numero non può superare Z .

Condizione affinchè un circuito C di F sia unilatero è che la sua immagine C' su S passi un numero dispari di volte per i punti fondamentali ⁽⁵⁾. Introducendo le coordinate x_i di C rispetto al gruppo dei punti P_i , cioè i numeri che esprimono le molteplicità corrispondenti del circuito C' , presi, come qui conviene, rispetto al mod. 2, la condizione in discorso si esprime, nel corpo C_2 (corpo delle classi, mod. 2) colla relazione

$$(1) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_Z = 1,$$

o colla equivalente, più adatta al nostro proposito

$$(1') \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_Z^2 = 1.$$

Si vede ancora subito che se D è un altro circuito di coordinate y_i (soddisfacenti alla (1') se D è unilatero) la condizione affinchè C, D si taglino in un numero pari di punti, in particolare non si taglino, si esprime, sempre nel corpo C_2 , colla relazione

$$(2) \quad x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_Z y_Z = 0.$$

Dalle (1') (2) discende che se si hanno, su F , m circuiti unilateri a due a due non intersecantisi, il quadrato per righe della matrice delle loro coordinate è la matrice quadrata unitaria di ordine m . Non può dunque essere $m > Z$, perchè allora, in forza

⁽⁴⁾ Vedi, anche per qualche punto seguente, la Memoria citata in ⁽²⁾. Questo è bene un teorema generale di topologia, equivalente al teorema fondamentale circa la condizione d'omeomorfismo di due superficie unilateri (chiuse); ma, per le applicazioni che abbiamo di mira, non vi sarà bisogno d'invocarlo, in quanto allora la rappresentazione sferica delle superficie si dedurrà senz'altro dalla rappresentazione piana mediante una proiezione stereografica; cioè potrà considerarsi come data « a priori ».

⁽⁵⁾ L'immagine di C non è un circuito, solo quando si riduce ad uno dei punti fondamentali P_i ; ma in tal caso l'eccezione scompare assoggettando C ad una piccola deformazione, dopo la quale la sua immagine è un piccolo circuito C' contenente P_i sul contorno.

d'un teorema elementare (che sussiste in qualunque corpo numerico) il determinante dell'ultima matrice dovrebbe risultare nullo.

3. Andiamo ora a giustificare l'affermazione fatta in principio circa l'identità fra circuiti dispari e circuiti unilateri. Non ci fermeremo al caso delle superficie cubiche con 27 rette reali, ma ci porremo nelle condizioni più generali seguenti:

Sia F una superficie razionale reale, di S_2 , rappresentabile realmente sul piano (quindi con una sola falda), Σ il sistema lineare le cui curve, d'ordine x , sono immagini delle sezioni iperpiane di F . Supponiamo che Σ sia privo di curve fondamentali reali, e che i suoi punti base reali $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$, colle molteplicità $x_1, x_2, \dots, x_m$ siano distinti ed impropri (cioè che le curve di Σ vi passino con qualche direzione variabile, per guisa che ad essi corrispondano curve, non punti, sulla F) ⁽⁶⁾. Vogliam provare che condizione necessaria e sufficiente affinchè su F i circuiti dispari s'identifichino con quelli unilateri è che gl'interi $x, x_1, x_2, \dots, x_m$ siano tutti dispari; cioè tutti eguali ad 1, se, come ancor conviene, li consideriamo nel corpo C_2 .

Proiettiamo stereograficamente il piano rappresentativo sopra una sfera S da un punto P di questa; avremo quivi $m + 1$ punti fondamentali $P, P_1, \dots, P_m$, nè, per le ipotesi fatte, la biunivocità della rappresentazione di F su S , patirà (nel campo reale) altre eccezioni ⁽⁷⁾. Se ne apprende intanto che F è unilatera ed ha l'ordine di connessione Z eguale ad $m + 1$.

Inoltre è subito visto che una sezione iperpiana reale, C , di F è rappresentata su S da un insieme C' di circuiti colle coordinate (comutate globalmente) $x, x_1, \dots, x_m$.

⁽⁶⁾ Poichè si è supposto che i punti base *reali* di Σ siano distinti, le tangenti fisse alle curve di quel sistema in un punto Q_i , se esistono, sono necessariamente immaginarie, conjugate a coppie, e quindi l'ordine della curva razionale di F , corrispondente a Q_i , ha sempre la stessa parità di m_i .

⁽⁷⁾ Intendiamo pertanto di non considerare come tali quelle offerte dagli eventuali *gruppi neutri* (neutri, sul piano rappresentativo, per il sistema Σ , cioè tali che il passaggio per uno dei loro punti porta di conseguenza il passaggio per tutti gli altri); ciò vuol dire, che, conformemente ad un punto di vista consono all'argomento, e già altrove precisato, consideriamo gl'intorni dei punti multipli corrispondenti a quei gruppi neutri, come topologicamente scissi, in tanti intorni di punti semplici quante son le immagini. Coerentemente, per curve, prive, sulla F , di punti multipli, intendiamo quelle le cui immagini piane non hanno punti multipli fuori dei punti base di Σ (bastando naturalmente, in ogni caso, considerare le molteplicità in senso reale).

Dopo ciò la prova dell'asserto si consegue in due parole.

Intanto la necessità della condizione si assoda esprimendo che i circuiti unilateri rappresentati dai punti fondamentali, sono dispari, cioè tagliano in un numero dispari di punti le sezioni iper-piane. Ciò porge subito $x = x_1 = \dots = x_m = 1$.

E per la sufficienza basta osservare, che, se $x = x_1 = \dots = x_m = 1$, ogni circuito dispari di F , di coordinate $y, y_1, \dots, y_m$ è unilatero (e viceversa), giacchè la condizione di disparità

$$xy + x_1y_1 + \dots + x_my_m = 1$$

si riduce alla

$$y + y_1 + \dots + y_m = 1,$$

ch'è pure (n.º prec. (1)) la condizione d'unilateralità.

Ne consegue che *l'osservazione della prof. Piazzolla-Beloch si estende a tutte le superficie razionali reali, rappresentate realmente sul piano mediante un sistema lineare Σ di curve d'ordine dispari, privo di curve fondamentali reali, ed i cui punti base reali (in numero di m) siano distinti, impropri, e di molteplicità dispari; nel senso che il numero dei circuiti dispari d'una curva algebrica reale (d'ordine qualunque, irriducibile o no) tracciata su una di tali superficie, non può superare $m + 1$.*

È, in particolare, immediata, l'estensione agli altri tipi di superficie cubiche generali con una falda, e con 15, 7, 3 rette reali (per cui Σ è un sistema reale di cubiche con 6 punti base semplici, distinti, ecc., dei quali risp. 4, 2, 0, reali) ai tipi generali di *superficie di SEGRE* in S_4 con 16, 8, 4 rette reali (rappresentate da sistemi lineari reali e completi di cubiche con 5 punti base semplici dei quali risp. 5, 3, 1 reali) alle corrispondenti proiezioni (con conica doppia) in S_3 da un punto reale generico dell'ambiente, ecc., ecc..

4. L'esistenza, sulle F considerate, di curve algebriche *irriducibili* col massimo numero $m + 1$ di circuiti dispari, si accerta senza fatica. Intanto una curva reale C , riducibile, in tali condizioni, si ottiene da una C' d'ordine $2m + 1$ del piano rappresentativo, composta con m piccoli circoli passanti per i punti base Q_i e con una retta reale che non li tagli; dopo di che basta assoggettare la C' ad una *piccola variazione* nel fascio determinato da essa e da una curva reale dello stesso ordine passante semplicemente per i punti Q_i , per ottenere, in corrispondenza, sulla F , la curva voluta.