
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

TH. ANGHELOTZA

Una estensione di un teorema di Hurwitz

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 12 (1933), n.5, p. 284–289.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_5_284_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_5_284_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Una estensione di un teorema di Hurwitz.

Nota di TH. ANGHELTUTZA (Cluj - Romania).

Consideriamo l'equazione algebrica

$$(1) \quad f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$$

e supponiamo che i coefficienti $a_0, \dots, a_n$ siano positivi. In questa ipotesi si ha il seguente bel teorema dovuto a HURWITZ ⁽¹⁾.

TEOREMA. — *I moduli delle radici dell'equazione (1) sono compresi nell'intervallo formato dal più piccolo e dal più grande dei seguenti rapporti*

$$(2) \quad \frac{a_0}{a_1}, \quad \frac{a_1}{a_2}, \dots, \quad \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Se i coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_n$ sono positivi decrescenti, risulta dal teorema di HURWITZ, che i moduli delle radici dell'equazione (1) non possono essere più piccoli dell'unità.

Questo è il bel teorema di KAKEYA ⁽²⁾. HURWITZ riduce la dimostrazione del suo teorema a quella del teorema di KAKEYA, mediante una trasformazione dell'equazione (1).

Il presente lavoro ha per scopo di dare una estensione al teorema di Hurwitz, il quale sarà, così, riattaccato ad un problema più generale.

Consideriamo ancora l'equazione (1) i cui coefficienti

$$a_0, a_1, \dots, a_n$$

siano, questa volta, dei numeri qualunque.

Designiamo con A_i il modulo di a_i

$$A_i = |a_i| \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Sia x una radice qualunque di questa equazione.

Il modulo r di questa radice soddisfa evidentemente, all'ineguaglianza che segue:

$$A_0 - A_1r - A_2r^2 - \dots - A_nr^n \leq 0.$$

Segue da ciò, che la radice positiva ρ dell'equazione

$$(3) \quad A_0 - A_1\rho - A_2\rho^2 - \dots - A_n\rho^n = 0$$

⁽¹⁾ A. HURWITZ, « The Tôhoku Mathematical Journal », vol. 4, 1913, p. 89; « Mathematische Werke », Bd. II, p. 627.

⁽²⁾ KAKEYA, « The Tôhoku Mathematical Journal », vol. 2, 1912, p. 140.

è un limite inferiore per i moduli dell'equazione (1). Si ha dunque

$$(4) \quad r \geq \rho.$$

D'altra parte il modulo r soddisfa pure all'ineguaglianza

$$A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \dots + A_{n-1} r^{n-1} - A_n r^n \geq 0.$$

Risulta così che la radice positiva ρ_1 dell'equazione

$$(5) \quad A_0 + A_1 \rho_1 + A_2 \rho_1^2 + \dots + A_{n-1} \rho_1^{n-1} - A_n \rho_1^n = 0$$

è un limite superiore per i moduli delle radici dell'equazione (1), cioè

$$(6) \quad r \leq \rho_1.$$

I moduli delle radici dell'equazione (1) sono collocati nell'intervallo (ρ, ρ_1) ; i numeri ρ e ρ_1 sono rispettivamente le radici delle equazioni (3) e (5).

Questa è una estensione molto ampia del teorema di HURWITZ. Tuttavia crediamo utile di dare una limitazione dei moduli delle radici di una equazione algebrica, in funzione del più piccolo e del più grande dei rapporti

$$(7) \quad \frac{A_0}{A_1}, \frac{A_1}{A_2}, \dots, \frac{A_{n-1}}{A_n}$$

come nel teorema di HURWITZ.

Facciamo prima una digressione, cercando l'equazione algebrica che abbia una radice di modulo ρ_1 . Sia $x = \rho_1 e^{i\varphi}$ questa radice. Per questo la somma

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} = -a_n x^n$$

deve avere il suo modulo eguale alla somma dei moduli dei suoi termini.

Per conseguenza, occorre che i numeri

$$a_0, a_1 x, \dots, a_{n-1} x^{n-1}, -a_n x^n$$

abbiano il medesimo argomento.

Dunque, ponendo

$$a_0 = A_0 e^{i\varphi_0}, \quad a_1 = A_1 e^{i\varphi_1}, \dots, \quad a_n = A_n e^{i\varphi_n}$$

si hanno le seguenti eguaglianze

$$\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi = \varphi_2 + 2\varphi = \dots = \varphi_{n-1} + (n-1)\varphi = \pi + \varphi_n + n\varphi.$$

Da queste si deducono le eguaglianze

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 - \varphi_1 \\ \varphi_h &= h\varphi_1 - (h-1)\varphi_0 & h=2, 3, \dots, n-1 \\ \varphi_n &= n\varphi_1 - (n-1)\varphi_0 - \pi. \end{aligned}$$

L'equazione che abbia una radice di modulo φ_1 è, dunque, la seguente

$$A_0 + A_1 e^{i\alpha} x + A_2 e^{2i\alpha} x^2 + \dots + A_{n-1} e^{i(n-1)\alpha} x^{n-1} - A_n e^{in\alpha} x^n = 0$$

dove $\alpha = \varphi_1 - \varphi_0$.

Quest'equazione, si riduce mediante la sostituzione

$$x = ue^{i\alpha}$$

all'equazione (5)

$$A_0 + A_1 u + \dots + A_{n-1} u^{n-1} - A_n u^n = 0$$

$A_0, A_1, \dots, A_n$ essendo moduli, dunque numeri non negativi.

Le equazioni algebriche i cui moduli delle radici toccano i loro limiti superiori si riducono alle equazioni del tipo (5).

L'analogo problema relativo al limite inferiore φ si riduce al precedente. Infatti, i moduli delle radici dell'equazione in $\frac{1}{x}$

$$\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n = 0$$

devono toccare il loro limite superiore. Per ciò quest'ultima equazione deve avere la forma

$$A_n + \frac{A_{n-1}}{x} e^{i\omega} + \dots + \frac{A_1}{x^{n-1}} e^{i(n-1)\omega} - \frac{A_0}{x^n} e^{in\omega} = 0.$$

Conseguentemente l'equazione

$$A_0 - A_1 e^{i\beta} x - A_2 e^{2i\beta} x^2 - \dots - A_{n-1} e^{i(n-1)\beta} x^{n-1} - A_n e^{in\beta} x^n = 0$$

ha una radice di modulo ρ . Quest'equazione si trasforma nell'equazione (3).

$$A_0 - A_1 x - A_2 x^2 - \dots - A_{n-1} x^{n-1} - A_n x^n = 0.$$

Cerchiamo ora l'equazione i cui moduli delle radici toccano alla volta i due limiti ρ e ρ_1 . Per questo si devono avere le eguaglianze

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 e^{i\alpha} = -A_1 e^{i\beta} \\ A_2 e^{2i\alpha} = -A_2 e^{2i\beta} \\ \dots \dots \dots \\ A_{n-1} e^{i(n-1)\alpha} = -A_{n-1} e^{i(n-1)\beta} \\ A_n e^{in\alpha} = A_n e^{in\beta} \end{array} \right.$$

Supponiamo, come succede in generale, $A_1 \neq 0$. La prima eguaglianza ci dà

$$\beta = \alpha + \pi$$

segue da ciò che i coefficienti $A_2, A_4, \dots$ di indice pari e più piccoli di n , debbono essere nulli. L'equazione cercata è dunque della forma

$$A_0 + A_1 e^{iz} x + A_2 e^{3iz} x^2 + \dots + A_{2k-1} e^{2(k-1)iz} x^{2k-1} - A_{2k} e^{2kiz} x^{2k} = 0.$$

Infatti quest'equazione ammette le radici

$$\begin{aligned} x' &= \rho_1 e^{-iz} \\ x'' &= -\rho e^{-iz} \end{aligned}$$

dove ρ e ρ_1 sono rispettivamente le radici positive delle equazioni

$$A_0 - A_1 \rho - A_3 \rho^3 - \dots - A_{2k-1} \rho^{2k-1} - A_{2k} \rho^{2k} = 0$$

$$A_0 + A_1 \rho_1 + A_3 \rho_1^3 + \dots + A_{2k-1} \rho_1^{2k-1} - A_{2k} \rho_1^{2k} = 0.$$

Ritorniamo adesso al teorema di Hurwitz. I coefficienti

$$a_0, a_1, \dots, a_n$$

dell'equazione (1) si suppongono dunque positivi e si deve provare che i moduli delle radici di quest'equazione sono compresi fra il più grande dei rapporti della successione (2). Infatti consideriamo l'equazione ottenuta moltiplicando l'equazione (1) per il binomio $s - x$,

$$(s - x)f(x) = a_0 + (sa_1 - a_0)x + \dots + (sa_n - a_{n-1})x^n - a_n x^{n+1} = 0$$

designandosi con s il più grande dei rapporti della successione (2).

L'equazione così formata è analoga all'equazione (5). Per conseguenza i moduli delle sue radici hanno per limite superiore la sua radice positiva che è s . Dunque i moduli delle radici dell'equazione considerata da HURWITZ sono inferiori ad s . Sia σ il più piccolo dei rapporti della successione (2) e consideriamo l'equazione

$$(\sigma - x)f(x) = a_0 - (a_0 - \sigma a_1)x - \dots - (a_{n-1} - \sigma a_n)x^n - a_n x^{n+1} = 0$$

analoga all'equazione (3). Dunque i moduli dell'equazione (1) hanno per limite inferiore il rapporto σ . Per la dimostrazione di questa seconda parte del teorema di HURWITZ si sarebbe potuto formare l'equazione $x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$ e applicare il risultato della prima parte. Si vede, così, come il teorema di HURWITZ si ricollega alle considerazioni generali fatte al principio di questo studio.

Ma queste considerazioni ci permettono di estendere il teorema. Allo scopo, consideriamo l'equazione (1), i cui coefficienti

$$a_0, a_1, \dots, a_n$$

siano dei numeri qualunque, diversi dallo zero. Siano a e b il più piccolo e il più grande dei rapporti della successione (7), formata con i moduli dei coefficienti dell'equazione considerata.

TEOREMA. — *I moduli delle radici dell'equazione (1) si trovano entro l'intervallo $\left(\frac{a}{x}, xb\right)$; il numero x è la radice positiva dell'equazione*

$$(8) \quad x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \dots - x - 1 = 0.$$

Dimostriamo che i moduli delle radici hanno per limite superiore xb . Infatti, abbiamo visto che la radice positiva ρ_1 dell'equazione (5) è un limite superiore di questi moduli

$$(9) \quad \rho_1 = \frac{A_0 + A_1 \rho_1 + \dots + A_{n-1} \rho_1^{n-1}}{A_n}$$

Si tratta di provare che xb è superiore a ρ_1 . Infatti dalle disuguaglianze

$$\frac{A_0}{A_1} \leq b, \quad \frac{A_1}{A_2} \leq b, \dots, \quad \frac{A_{n-1}}{A_n} \leq b$$

si deducono le seguenti

$$A_0 \leq b^n A_n, \quad A_1 \leq b^{n-1} A_n, \dots, \quad A_{n-1} \leq b A_n.$$

L'equazione (9), tenendo conto di queste disuguaglianze, ne dà la seguente

$$\rho_1^n \leq b^n + b^{n-1} \rho_1 + \dots + b \rho_1^{n-1}$$

oppure

$$\left(\frac{\rho_1}{b}\right)^n - \left(\frac{\rho_1}{b}\right)^{n-1} - \dots - \left(\frac{\rho_1}{b}\right) - 1 \leq 0.$$

Si ha dunque

$$\rho_1 \leq bx$$

x essendo la radice positiva dell'equazione (8). Applicando questo risultato all'equazione in $\frac{1}{x}$

$$\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n = 0$$

si trova l'ineguaglianza

$$\frac{a}{x} < \rho.$$

Il teorema è così dimostrato.

Cerchiamo le equazioni per le quali si ha

$$\rho_1 = bx.$$

Si vede facilmente che si deve avere

$$A_0 = b^n A_n, \quad A_1 = b^{n-1} A_n, \dots, \quad A_{n-1} = b A_n.$$

Ciò essendo, si ha

$$a = b$$

$$\xi = \frac{b}{z}.$$

L'equazione (8) presenta questa particolarità. Evidentemente esistono delle equazioni per le quali l'intervallo $\left(\frac{a}{z}, zb\right)$ può essere ridotto. In particolare ciò succede per le equazioni di HURWITZ. Per finire, diciamo una parola sopra un altro bel teorema dovuto a HAYASHI ⁽¹⁾. Consideriamo per ciò l'equazione (5) i coefficienti $A_0, A_1, \dots, A_n$ essendo positivi.

I moduli delle radici di quest'equazione, oltre la radice positiva, non sorpassano il più piccolo dei rapporti

$$\frac{A_0}{A_1}, \frac{A_1}{A_2}, \dots, \frac{A_{n-2}}{A_{n-1}}.$$

Questo è il teorema di HAYASHI. HURWITZ riconduce la dimostrazione di questo teorema a quella del suo teorema. I teoremi di KAKEYA e di HURWITZ sono stati dimostrati recentemente per un'altra via dal sig. BENIAMINO SEGRE. Nel medesimo tempo, il sig. SEGRE ⁽²⁾ ha esteso questi teoremi alle serie intere a coefficienti reali e positivi. D'altronde una estensione analoga fu fatto anche da noi ⁽³⁾. La limitazione dei moduli delle radici d'una equazione algebrica, che abbiamo dato in questo studio, può essere generalizzato per le serie intere.

⁽¹⁾ HAYASHI, « The Tôhoku Mathematical Journal », vol. 2, 1912, p. 215.

⁽²⁾ B. SEGRE, « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », 15 giugno 1933, p. 123.

⁽³⁾ TH. ANGHELTZA, « Buletinul Societatii de Stiinte », Cluj, 1933.