BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GUIDO ASCOLI

Sopra una forma del teorema del valor medio per le funzioni analitiche

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 12 (1933), n.5, p. 281–283.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_5_281_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_5_281_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1933.

PICCOLE NOTE

Sopra una forma del teorema del valor medio per le funzioni analitiche.

Nota di GUIDO ASCOLI (a Pisa).

Sunto. - *Si dimostra come il teorema del valor medio per le funzioni analitiche dato da WEIERSTRASS possa porsi in una nuova forma indipendente dal concetto di campo di convessità.*

1. Il teorema del valor medio, il quale non vale nella forma ordinaria nel campo delle funzioni di variabile complessa, è stato sostituito per questo caso con enunciati più o meno analoghi, per opera di vari Autori (DARBOUX, WEIERSTRASS, CURTISS...). Noi assumeremo qui come punto di partenza l'enunciato di WEIERSTRASS, che è il seguente: *se $w = f(z)$ è funzione olomorfa di z sul segmento ab del piano complesso si ha*

$$(1) \quad f(b) - f(a) = (b - a)Z$$

essendo Z un punto del campo di convessità dei valori che $f'(z)$ assume mentre z descrive il segmento ab (ossia appartenente al minimo insieme convesso contenente i punti $f'(z)$ corrispondenti).

Non è forse stato mai osservato che questo teorema può ricevere una forma diversa appoggiandosi a un risultato elementare della teoria degli insiemi convessi: e cioè che il campo di convessità di un dato insieme I è formato dai punti di tutti i triangoli che hanno per vertici punti di I ⁽¹⁾. Il punto Z che compare

(1) Cfr. H. STEINITZ, *Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme*, (« Journal f. reine u. ang. Math. »), B. 143, pag. 155, Satz 4.

nella (1) appartiene dunque al triangolo che ha per vertici $f'(z_1)$, $f'(z_2)$, $f'(z_3)$, essendo z_1, z_2, z_3 punti distinti del segmento ab . La (1) può dunque scriversi

$$(2) \quad f(b) - f(a) = (b - a) \frac{\lambda_1 f'(z_1) + \lambda_2 f'(z_2) + \lambda_3 f'(z_3)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

essendo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ numeri reali non negativi, z_1, z_2, z_3 , come si è detto, punti distinti del segmento ab .

2. Se nella (2) due dei numeri $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ fossero nulli, varrebbe nel campo complesso una formola identica all'ordinario teorema del valor medio; e ciò non è in generale. Ma può suppersi in ogni caso nullo uno di questi numeri, per es. λ_3 e ridurre la (2) alla forma più semplice

$$(3) \quad f(b) - f(a) = (b - a) \frac{\lambda_1 f'(z_1) + \lambda_2 f'(z_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} ?$$

Si risponde affermativamente; ciò in base al fatto geometrico che per l'insieme formato dai valori di $f'(z)$ mentre z descrive il segmento ab , che è una curva l , il campo di convessità è costituito già dai segmenti congiungenti a due a due i punti dell'insieme, cioè dalle corde della curva. Vale cioè il teorema:

Le corde di una linea l costituiscono un insieme convesso (necessariamente il minimo che contiene la linea).

Per dimostrarlo, basterà provare che se AB, CD sono corde di l , P un punto di AB , Q un punto di CD , O un punto di PQ , O appartiene a qualche corda di l . Ora, lasciato da parte il caso banale in cui A, B, C, D siano allineati, è chiaro che O apparterrà al minimo poligono convesso che contiene questi quattro punti e che sarà un quadrilatero o un triangolo aventi i vertici tra i punti stessi. In ogni caso quindi O apparterrà a uno dei triangoli ABC, ABD, ACD, BCD . Basterà considerare il caso in cui O sia interno ad ABC .

Siano OX, OY i prolungamenti di AO, BO oltre O ; essi dividono il piano in due regioni angolari una delle quali contiene C , l'altra A e B . La linea l passa per A, B, C ; dunque essa taglia almeno una delle semirette OX, OY . Ma se l taglia, per es. OX in E , AE è una corda di l contenente O ; e il teorema è dimostrato.

Notiamo per incidenza che nell'ipotesi che l sia una linea vi è molto di sovrabbondante: basta supporre che l sia un continuo. Il teorema vale anzi anche se l è somma di due continui; lo si

dimostra con una leggera modificazione del ragionamento precedente. Supposto cioè (l'ipotesi opposta essendo già stata discussa) che A, B, C non appartengano tutti a uno stesso continuo, vi apparterranno però due di questi punti. Se questi sono, per es. A e C , il ragionamento usato vale ancora per intero.

Non vale il teorema in generale se l è somma di tre continui, o più, come è evidente.

3. Abbiamo voluto riconnettere la formula (3) al teorema di WEIERSTRASS; ma una dimostrazione diretta ne è pure ben facile. Intanto, mercè la nota trasformazione

$$F(z) = f(z) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (z - a)$$

ci si riconduce al caso particolare in cui la $f(z)$ assume valori eguali all'estremo dell'intervallo. Per questo caso la tesi prende la forma

$$\lambda f'(z_1) + \mu f'(z_2) = 0$$

per convenienti valori di λ, μ, z_1, z_2 , ed è certamente verificata se $f'(z)$ si annulla tra a e b . Nel caso opposto essa afferma che esistono nell'intervallo due punti z_1, z_2 in cui $f'(z)$ ha argomenti differenti di π . Tenuto conto allora che il dz ha argomento costante e che la curva descritta da $f(z)$ non ha punti angolosi (perchè $f'(z) \neq 0$) vediamo che la tesi sarà provata con la dimostrazione del teorema geometrico seguente:

La linea regolare l (dotata cioè di tangente orientata variabile con continuità al variare del punto di contatto) abbia gli estremi coincidenti. Esistono allora coppie di punti di l nei quali le tangenti hanno orientazioni opposte.

Per la supposta regolarità della linea, le orientazioni delle tangenti riempiono un certo angolo rs (lati compresi). Se questo angolo fosse convesso o piatto ed x la sua bisettrice, le tangenti alla linea formerebbero con x angolo acuto o retto, sicchè mentre un punto descrive la linea la sua proiezione su x si moverebbe sempre in uno stesso senso; ciò contro l'ipotesi che tale proiezione debba tornare al punto di partenza.

Le orientazioni delle tangenti ad l riempiono dunque un angolo concavo (eventualmente un giro); in esso esistono infinite coppie di orientazioni opposte, a cui corrispondono le tangenti richieste. Il teorema è così dimostrato, e rimane anzi stabilito che si può soddisfare alla (3) con infinite coppie distinte di valori z_1, z_2 .