
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Recensioni

- * A. Einstein: Les fondamente de la théorie de la Relativité générale.-
Théorie unitaire de la gravitation et de l'électricité. - Sut la struc-
ture cosmologique de l'espace
- * Victor Henri: Matière et énergie (Physique moléculaire)
- * Krise und Neuembail in den exakten Wissenschaften (B. Levi)
- * T. Schur : Ein Beitrag zur elementaren Zahlentheorie
- * H. W. Bruns : Ueber die Ursprung der Tatsache die dem grossen
Fermât"sehen Theorem zugrunde liegt.
- * Th. Motzkin und A. Ostrowski: Ueber den Fundamentalsatz der
Algebra (B. Levi)
- * I. Schur: Untersuchungen ü. algebr. Gleichungen. I: Bemerkungen
zu einem Satz von E. Schmidt (B. Levi)
- * O. Veblen: Projektive Relativitätstheorie (Enea Bortolotti)
- * O. Veblen e J. H. C. Whitehead: The foundations of Differential
Geometry Enea Bortolotti (Enea Bortolotti)
- * P. Montel: Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes
(Tullio Viola)
- * B. Bisser et C. E. Traynard: Les principes de la Statistique mathé-
matique (Bruno Tedeschi)
- * R. Brunetti: L'Atomo e le sue radiazioni (U. Crudeli)

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 12 (1933), n.4, p. 250-268.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_4_250_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_4_250_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consenti-
to liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito
l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie
di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RECENSIONI

A. EINSTEIN : *Les fondaments de la théorie de la Relativité générale. - Théorie unitaire de la gravitation et de l'électricité. - Sur la structure cosmologique de l'espace.* (Hermann, Paris ; prix 35 fr.).

In questo libro sono riunite, tradotte in francese da M. SOLOVINE, le Memorie fondamentali di EINSTEIN sulla teoria generale della relatività che furono già pubblicate dall'illustre Autore negli « Ann. der Phys. » del 1916 e negli « Atti dell' Accademia di Berlino » del 1931 ; Memorie troppo celebri ormai perchè occorra tenerne parola.

Vi è in più una Memoria sulla struttura cosmologica dello spazio che è tradotta da un manoscritto redatto da EINSTEIN nel settembre del 1932. Qui è studiata la questione riguardante l'influenza esercitata dalle stelle sulla struttura metrica dello spazio, nell'ipotesi che la materia sia distribuita con una densità media finita.

L'A. mostra dapprima che un universo in cui la densità media è diversa da zero non può essere euclideo, e che d'altra parte un mondo statico e sferico (caso che segue subito per semplicità a quello euclideo) è ben difficile di potersi ammettere. Partendo perciò dalle ricerche di FRIEDMANN e di LEMAITRE, i quali considerano la densità e il raggio dell'universo funzioni del tempo, Egli è condotto ad esaminare una soluzione dinamica del problema; tanto più che le bellissime ricerche di HUBBLE sulle nebulose danno una giustificazione a cotesta soluzione che può dirsi sperimentale. Il valore che trova per la densità media è dell'ordine di 10^{-28} ; il che è in buon accordo con le stime degli astronomi.

L'A. conclude: « Il résulte de ces considérations que, dans l'état actuel de nos connaissances, le fait d'une densité de la matière différent de zéro ne doit pas être relié théoriquement avec une courbure spatiale, mais avec une expansion spatiale. Nous ne voulons pas, naturellement, dire par là qu'une telle courbure n'existe pas; mais nous n'avons pour le moment aucun indice de son existence. Elle devrait, en tout cas, être sensiblement moindre que ne faisait croire la théorie primitive ».

p. b.

VICTOR HENRI: *Matière et énergie (Physique moléculaire)*. (Hermann, Paris; prix 110 fr.).

I progressi della fisica atomica sono stati sì grandi e rapidi in quest'ultimo ventennio che riesce difficile agli studiosi non specializzati tenersi un poco al corrente, ed abbracciare d'un solo sguardo il cammino percorso e i nuovi orizzonti aperti all'indagine scientifica. A vincere questa difficoltà viene opportunamente in aiuto questo libro, in cui il Chiar.^{mo} Professore dell'Università di Liège ha voluto sistemare l'insieme complesso delle odierne conoscenze intorno alla struttura della materia e all'energia.

Per la chiarezza dell'esposizione, per la sapiente coordinazione delle varie parti, per l'idea direttrice poggiata sull'unione indissolubile fra materia ed energia, e per l'equilibrato spirito critico che vi domina, il libro riesce pienamente allo scopo.

Naturalmente non tutti i soggetti sono trattati con pari ampiezza; ciò non sarebbe stato possibile in 400 pagine. Per esempio la meccanica ondulatoria è solo accennata nei suoi principi; ma questo non fa difetto, giacchè esistono su cotesta materia molti trattati speciali.

L'A. esamina anzitutto come si sia pervenuti a dimostrare la discontinuità della materia, e indi a enumerare, pesare e misurare gli atomi e le molecole, e come sia sorta e progredita la nozione d'elemento chimico. Questa fondamentale nozione conduce a cercare se non esista una proprietà fisica o chimica comune a tutti gli elementi. Essa è stata trovata nello spettro dei raggi X, il quale ci ha svelata l'esistenza d'un principio unico che domina nella struttura di tutti gli atomi. Tutto ciò è sviluppato nei tre primi capitoli.

La scoperta degli elementi radioattivi ha aperto nuovi orizzonti alla scienza. Essa ha portata la prova della trasmutazione dell'evoluzione degli elementi: « Ce fut la porte par laquelle la physique entra dans la chimie et y apporte une rénovation complète ».

L'A. espone i fenomeni della radioattività in due capitoli densi di note bibliografiche e di tavole numeriche accuratissime; ai quali segue un bel capitolo sugli isotopi, e sul calcolo e la misura dell'energia di formazione degli elementi; ed un altro sulla disintegrazione artificiale e sulla sintesi degli elementi.

Nel Cap. VIII è affrontato il problema di determinare la legge che regola la distribuzione spaziale degli atomi. Con dovizia di tabelle numeriche e di grafici l'A. ha saputo coordinare molto bene le numerose ricerche e gl'importanti risultati ottenuti, dando un quadro completo di questo fondamentale soggetto.

Un capitolo speciale tratta della teoria cinetica dei gas. L'ultimo capitolo è un'esposizione condensata della teoria della struttura degli atomi dalle sue origini fino agli sviluppi più moderni.

p. b.

Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften. — Fünf Wiener Vorträge. Leipzig und Wien, Franz Deuticke, 1933, p. 130+II. RM. 3,60; S. austr. 5,40.

Sono cinque conferenze intorno alle più recenti vedute sulla fisica e sui fondamenti della matematica: HERMANN MARK: *Lo sconvolgimento della fisica classica per l'esperienza.* — HANS THIRRING: *La trasformazione dei concetti fondamentali della fisica.* — HANS HAHN: *La crisi dell'intuizione.* — GEORG NÖBELING: *La quarta dimensione e lo spazio curvo.* — KARL MENGER: *La nuova logica.*

Ma è veramente giusto parlare di *crisi* e di *ricostruzione*? O non è questo piuttosto una concessione a una meno sana tendenza del tempo a drammatizzare coll'iperbole risonante? Gli esperimenti che hanno *sconvolto* la fisica classica sono quelli che si riconnettono alla teoria della relatività e alle teorie quantistiche e ondulatorie; ma, osserva il THIRRING, l'irrazionalità dei fatti nuovamente scoperti non ha nulla di intrinseco e si elimina modificando convenientemente il sistema dei concetti fondamentali, il quale d'altronde è largamente convenzionale ed arbitrario: dei concetti nuovi a cui la fisica è stata condotta, taluno soddisfa però ancora limitatamente le esigenze della ragione, e pare anche incominci ad inaridire: tale per es., l'equazione di SCHRÖDINGER, vera *formola magica* impostasi a cagione di alcuni smaglianti risultati. Un trapasso fra lo *sconvolgimento della fisica* e la *crisi dell'intuizione* è l'esposizione del NÖBELING in cui l'A. si domanda intorno alla dimensionalità e alla curvatura dello spazio fisico. E lo HAHN parla poi di moti senza velocità, curve senza tangente, curve riempienti un quadrato, curve diramanti in ogni punto, terne di aree aventi tutti i punti di confine comuni, ecc.; affinamento, più minuta analisi dell'intuizione, ma non crisi. Forse la nuova logica, o più precisamente le domande di non-contraddittorietà della matematica, sono quelle che, pure appartenendo al puro spirito e capaci perciò di essersi presentate in ogni tempo, maggiormente si allontanano dal quadro classico: il MENGER riferisce in proposito anche di alcuni notevolissimi risultati ottenuti dal GÖDEL al tutto recentemente (1933).

Ciascuna conferenza costituisce una interessante lettura ed è

arricchita da indicazioni bibliografiche sufficienti per approfondire ulteriormente gli argomenti. B. LEVI

I. SCHUR: *Ein Beitrag zur elementaren Zahlentheorie*. Sonderausgabe aus. d. Sitz-Ber. d. preuss. Akademie d. W. Berlin, 1933, p. 9. RM. 1.

H. W. BRUNS: *Ueber die Ursprung der Tatsache die dem grossen Fermat'schen Theorem zugrunde liegt*. Basel, B. Wepf u. C., 1933, p. 15, senza indicazione di prezzo.

Il primo di questi opuscoli ci dà una notevole generalizzazione del teorema di FERMAT $a^p - a \equiv 0 \pmod{p}$. Si definisce successione derivata di una data successione $a_0 a_1 a_2 \dots$ rispetto a un modulo p la successione $a'_0 a'_1 a'_2 \dots$ in cui $a'_{n-1} = \frac{a_n - a_{n-1}}{p^n}$. Naturalmente

la nuova successione può ancora derivarsi e così di seguito. Ciò premesso, la proposizione del SCHUR è: *Se p è un numero primo, a un intero e non divisibile per p e si considera la successione $a, a^p, a^{p^2}, \dots$ le successive $p-1$ successioni derivate di essa rispetto al mod. p sono ancora costituite di numeri interi: la condizione necessaria e sufficiente affinché la p -ma derivata non risulti pure di numeri interi è che a^{p-1} non sia divisibile per p^2 : se $p=2$ e soltanto allora risulterà non intero soltanto il primo termine*. La dimostrazione del SCHUR non si può dire elementare, ed anzi mette a frutto la nota abilità di algebrista dell'A..

Il secondo opuscolo è invece uno degli innumerevoli tentativi di dimostrare l'ultimo teorema di FERMAT, $A^n + B^n - C^n \neq 0$ (A, B, C, n interi, $n > 2$) con mezzi elementari. La via seguita dall'A., consistente nel cercare una scomposizione del numero $A + B - C$ in fattori che, a causa dell'ipotesi $A^n + B^n - C^n = 0$, avrebbero una complicata espressione trascendente, potrebbe solo essere giustificata dal successo. Ma l'affermazione che, per $n > 2$ la detta espressione contraddica all'essere $A + B - C$ intero, non è corredata di alcuna prova. Nemmeno come trasformazione del problema pare che i calcoli dell'A. lo illuminino comunque.

TH. MOTZKIN und A. OSTROWSKI: *Ueber den Fundamentalsatz der Algebra*. Sonderabdruck a. d. Sitz-Ber. d. preuss. Akad. d. W. Berlin, 1933, p. 4. RM. 0,50.

I. SCHUR: *Untersuchungen ü. algebr. Gleichungen. I: Bemerkungen zu einem Satz von E. Schmidt*. Id., Berlin, 1933. RM. 2.

MOTZKIN e OSTROWSKI suggeriscono una modificazione della prima dimostrazione di GAUSS del teorema fondamentale, per la

quale, supposto che l'equazione sia

$$f(z) = U(xy) + iV(xy) = 0 \quad (z = x + iy),$$

anzichè considerare le curve $U(xy) = 0$, $V(xy) = 0$ si considerano soltanto i punti di esse su una successione di cerchi di centro l'origine. Il limite inferiore dei raggi di questi cerchi sui quali dette intersezioni formano due $2n$ -ple mutuamente separantesi è il modulo di una radice.

I. SCHUR precisa una notevole limitazione data nel luglio 1932 da E. SCHMIDT per il numero delle radici reali di un'equazione

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0.$$

Posto $P = \frac{1}{|\sqrt{a_0a_n}|} (|a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|)$ e detto r il numero delle radici reali, secondo SCHMIDT è

$$r < C\sqrt{\log P}$$

dove C è una costante dipendente solo dal grado n e che lo SCHMIDT non precisa ulteriormente. Il SCHUR mostra che per $n > 6$, $C^2 < 4n$ e, più precisamente, per ogni n , $r^2 - 2r < 4n \log P$: mentre qualunque sia $a < 4$ esistono equazioni di grado n per cui $r^2 > an \log P$.

La via seguita dal SCHUR è anche assai più ricca di idee e di risultati: all'espressione P egli sostituisce quella più semplice

$$Q = \frac{1}{|a_0a_n|} (|a_0|^2 + |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2)$$

e cerca di render minima questa espressione, dipendentemente dal numero delle radici reali positive e reali negative: a ciò serve l'osservazione che se si tengono fisse alcune radici dell'equazione e si lasciano mobili le altre su raggi passanti pel punto 0, Q diviene minimo quando queste si portano sul cerchio unità. Ne segue che il minimo cercato coincide con quello corrispondente alla $f(x)$ della forma

$$f(x) = (1-x)^p(1+x)^q g(x) \quad (p+q=r).$$

B. LEVI

O. VEBLEN: *Projektive Relativitätstheorie*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band II, Heft 1 (Berlin, Springer 1933) pp. V + 73.

La « teoria proiettiva della Relatività », già dal VEBLEN e da B. HOFFMANN sviluppata in un lavoro del 1930, e qui più ampiamente esposta, con le sue basi geometriche, e messa in rapporto

con la più recente teoria di EINSTEIN e W. MAYER, trova la sua origine da un lato nella cosiddetta « relatività a 5 dimensioni » di T. KALUZA, e d'altra parte, nelle ricerche del VEBLEN sulla « geometria proiettiva generalizzata » ⁽¹⁾.

Elemento comune alla recente ma già ricchissima letteratura del « problema unitario della Fisica » è la ricerca di una teoria geometrica in cui si presentino, in modo possibilmente semplice e naturale, dei *tensori* che formalmente si comportino, almeno con una certa approssimazione, come i tensori $g_{..}$ e $\Phi_{..}$, del potenziale gravitazionale ed elettromagnetico, nelle teorie di EINSTEIN e di MAXWELL. Naturalmente ciascuna di queste teorie presenta, oltre ai tensori voluti, anche degli altri elementi, che non si può pretendere a priori abbiano tutti una possibile interpretazione fisica; il che però sarebbe, a mio parere, presupposto indispensabile per l'accettazione della teoria in oggetto *quale teoria fisica*.

La teoria proposta dal KALUZA nel 1921, oggetto di numerose ricerche ⁽²⁾ negli anni seguenti, si vale della considerazione di un continuo riemanniano a *cinque dimensioni* (soggetto alla cosiddetta « Zylinderbedingung »), il cui ds^2 *contiene*, per così dire, entrambi i tensori fondamentali. Equazioni costruite proprio come, per lo spazio-tempo 4-dimensionale, lo sono le equazioni fondamentali di EINSTEIN, comprendono in prima approssimazione le equazioni di EINSTEIN e quelle di MAXWELL; le equazioni delle *geodetiche* nello spazio 5-dimensionale appaiono atte a rappresentare le linee orarie di punti materiali elettrizzati. Ma c'è un inconveniente grave: *che cosa possono significare, fisicamente, le cinque dimensioni?* non v'è, a quanto pare, risposta soddisfacente a questa domanda. L'inconveniente non è forse del tutto eliminato nella teoria di EINSTEIN e W. MAYER del 1931: in cui si associano degli spazi vettoriali 5-dimensionali ai singoli punti di un continuo 4-dimensionale. Il VEBLEN ha osservato che, senza rinunciare alla 4-dimensionalità, si possono ottenere dei sistemi ad indici suscettibili di assumere 5 valori, come il tensore fondamentale della metrica a 5 dimensioni di KALUZA; e anche dotati di proprietà formali convenienti per una applicazione alla Relatività; basta ricorrere alla *teoria delle connessioni proiettive*. Non posso qui

⁽¹⁾ Di queste ultime ricerche ho già abbastanza diffusamente parlato in questo « Bollettino » (nella « Relazione scientifica »: *Connessioni proiettive*, vol. IX, 1930, pp. 288-294; vol. X, 1931, pp. 28-34, 83-90).

⁽²⁾ di O. KLEIN, di F. GONSETH e G. JUVET, di FOCK, di EINSTEIN e di altri.

entrare nei dettagli: mi limiterò a rammentare ⁽¹⁾ che l'aggiunta, alle quattro coordinate curvilinee x^r , $r = 1, 2, 3, 4$, in una varietà 4-dimensionale, di un parametro x^0 (il *fattore* secondo J. H. C. WHITEHEAD; qui chiamato *Eichvariable*), che varia secondo la legge $\bar{x}^i = x^i + \log \rho(x^1, x^2, x^3, x^4)$, permette di prendere in considerazione dei sistemi ad indici $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ *variabili da 0 a 4*, che hanno una legge di trasformazione di tipo tensoriale, in cui i coefficienti sono formati con le $\theta_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\beta}}$ ($\alpha, \beta = 0, 1, \dots, 4$) come quelli delle

corrispondenti formule per gli ordinari tensori (*tensori affini*) sono formati con le θ_{rs}^{γ} ($r, s = 1, \dots, 4$). Sono questi i *tensori proiettivi*. Un *vettore* proiettivo controvariante y^{α} può interpretarsi come un punto di uno spazio proiettivo 4-dimensionale associato al punto generico P della varietà supposta (lo *spazio proiettivo tangente*), in relazione a un sistema proiettivo di riferimento che ha i punti fondamentali nel « punto di contatto » P e sulle tangenti alle 4 linee coordinate x^r che ne escono; la posizione dell'iperpiano fondamentale opposto a P dipendendo dalla scelta della *Eichvariable*. Un *tensore proiettivo simmetrico covariante* $G_{\alpha\beta}$ definisce quindi un *campo di quadriche* $G_{\alpha\beta} y^{\alpha} y^{\beta} = 0$, associate ai singoli punti della varietà e poste negli spazi proiettivi tangenti. Ebbene: il VEBLEN fa corrispondere a $G_{\alpha\beta}$ (e analogamente a $\gamma_{\alpha\beta} = \frac{G_{\alpha\beta}}{G_{00}}$, che a differenza di $G_{\alpha\beta}$ è *determinato* dal campo di quadriche) un sistema di funzioni $\Pi_{\alpha\gamma}^{\beta}$ (o $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$) che sono costruite con le $G_{\alpha\beta}$ (o le $\gamma_{\alpha\beta}$) proprio come i simboli di CHRISTOFFEL (di 2^a specie) in relazione a un tensore metrico fondamentale, e che hanno la stessa legge di trasformazione dei parametri di una connessione proiettiva. Anzi il VEBLEN, intendendo per *connessione proiettiva* proprio l'« oggetto geometrico » rappresentato da un sistema di funzioni che abbiano quella certa legge di trasformazione, può parlare senz'altro di *connessioni proiettive associate a quel campo di quadriche*; ma la legge di rappresentazione proiettiva fra gli spazi proiettivi tangenti in punti infinitamente vicini della varietà, che secondo le vedute di CARTAN è l'elemento geometrico essenziale della connessione proiettiva,

(¹) rimandando alla mia già citata « Relazione scientifica ». Credo che possano essere utilmente consultati, se pure vi si svolgono vedute alquanto diverse da quelle del VEBLEN, questi altri miei lavori: *Sulle connessioni proiettive*, « Rendiconti Circolo Matem. di Palermo », t. 56, 1932, pp. 1-58, e *Spazi proiettivamente piani*, « Annali di Matematica », serie IV, t. XI, 1932, pp. 111-134.

non risulta determinata, in quanto non vale la condizione $\Gamma_{\beta 0}^{\alpha} = \sigma \delta_{\beta}^{\alpha}$ (σ scalare arbitrario) ⁽¹⁾.

Non aggiungerò altro sulla parte *geometrica*, che ha nel volume del VEULEN svariati interessanti sviluppi, ad es. in relazione con le geometrie di CAYLEY. Pel lato *fisico*, mi limiterò a dire che le equazioni fondamentali del campo elettromagnetico e gravitazionale vengono ottenute con procedimento variazionale, annullando la variazione prima dell'integrale

$$\int B g^{\frac{1}{2}} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$$

(ove $B_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}$ è il *tensore di curvatura* della « connessione » $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$, e si ha $B_{\gamma\beta} = B_{\gamma\alpha\beta}^{\alpha}$, $B = \gamma^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}$, $\varphi_{\alpha} = \frac{G_{0\alpha}}{G_{00}}$, $g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} - \varphi_{\alpha}\varphi_{\beta}$, $g = |g_{rs}|$), (onde $g_{0r} = g_{r0} = g_{00} = 0$, $\varphi_0 = 1$), con l'ulteriore condizione $\gamma_{00} = 1$; e hanno la forma

$$B_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(3\varphi_{\alpha}\varphi_{\beta} - \gamma_{\alpha\beta})B = 0.$$

Queste equazioni « proiettive », spezzate, per così dire, nelle loro parti « affini » (p. 51), acquistano la forma delle equazioni di EINSTEIN e di MAXWELL (in assenza di corrente elettrica), se si interpretano le g_{rs} come potenziali gravitazionali e φ_r come vettore del potenziale elettromagnetico.

ENEA BORTOLOTTI

O. VEULEN e J. H. C. WHITEHEAD: *The foundations of Differential Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, N. 29 (Cambridge, at the University Press, 1932) pp. IX + 97.

Questo libricciuolo vuol essere un complemento all'altro « Cambridge Tract » in cui il VEULEN, qualche anno fa, riplasmando

⁽¹⁾ Nel mio ultimo lavoro citato ho indicato invece una connessione proiettiva (vera e propria, cioè nel senso di CARTAN) che è *individuata* da un campo di quadriche ed è tale inoltre che dà luogo a rappresentazioni fra gli spazi proiettivi tangenti che sono *congruenze* rispetto alle metriche di CAYLEY subordinate a quelle quadriche, e ha per *geodetiche* quelle del ds^2 che tali metriche di CAYLEY danno alla varietà. Da J. A. SCHOUTEN e D. VAN DANTZIG è stata ideata una teoria relativistica 4-dimensionale che si basa pure sulla considerazione di un campo di quadriche; mediante le quali *ed elementi estranei* si ricava una connessione proiettiva. Nei suoi più recenti sviluppi la teoria di SCHOUTEN e VAN DANTZIG compendia non solo quelle di EINSTEIN e di MAXWELL, ma anche la teoria di SCHRÖDINGER e DIRAC sulle onde materiali.

secondo vedute moderne la materia di un più antico volumetto di J. E. WRIGHT, e arricchendola con gli interessanti risultati della Scuola di Princeton, ha esposto la teoria degli invarianti delle forme differenziali quadratiche (e più in generale, delle connessioni affini). La presente opera è volta a stabilire delle *basi assiomatiche* per la costruzione di una geometria differenziale in una varietà ad n dimensioni, intesa nel senso più generale. Si tratta sostanzialmente di dare un substrato *topologico* agli sviluppi differenziali propriamente detti; ma, scostandosi dalle vedute più comunemente adottate (ad es. da SEVERI, da FRÉCHET, HAUSDORFF) gli AA. rinunciano a priori alla considerazione *diretta* della varietà e pensano questa sempre ed esclusivamente come data *per tramite d'un riferimento coordinato*. Cosicché, ad evitare circoli viziosi, debbono, coi sistemi d'assiomi prescelti, descrivere insieme gli elementi (o punti) che costituiscono la varietà in oggetto e il tipo di riferimento coordinato col quale quegli elementi s'intendono rappresentati.

Punto di partenza e base per l'intera costruzione è la nozione di *spazio aritmetico ad n dimensioni* (Cap. I), totalità dei sistemi di valori di n variabili reali indipendenti x^i . Per questo spazio vengono introdotte e analizzate (con sviluppi prettamente analitici) le nozioni di *dipendenza lineare* di due o più « punti aritmetici », di *traslazione*, di *distanza* (espressa al modo euclideo o pitagorico).

Come primo modello di spazi geometrici veri e propri si introducono poi (Cap. II) gli spazi « a gruppo fondamentale » secondo KLEIN. Si sa che se per una geometria secondo KLEIN in una varietà n -dimensionale è G^* il gruppo fondamentale, e G è la sua rappresentazione analitica in relazione con una certa rappresentazione dei punti della varietà mediante coordinate (onde G si potrà riguardare come un gruppo di trasformazioni *sui punti di uno spazio aritmetico*), in relazione a quella rappresentazione analitica viene definita una totalità di sistemi coordinati « privilegiati » nella supposta varietà, ciascuno dei quali dà luogo a *quella stessa rappresentazione analitica* G del gruppo fondamentale G^* ; dall'uno all'altro dei quali si passa con una (qualunque) trasformazione di G . Cosicché tutte e sole le proprietà geometriche della supposta varietà hanno quali *immagini* nello spazio aritmetico le proprietà invarianti per le trasformazioni del sistema coordinato privilegiato in altro tale sistema. È sostanzialmente questa la veduta cui s'ispirano gli AA.; i quali però, in conformità con l'indirizzo adottato, non assumono la definizione di KLEIN, ma stabiliscono la nozione di « geometria di un gruppo G », operante *sullo spazio aritmetico* n -dimensionale, riguardando i punti della varietà in oggetto e i

sistemi privilegiati come enti soggetti a soddisfare ai seguenti assiomi, e del resto indefiniti: G_1 : Ogni sistema coordinato « privilegiato » (preferred) è una trasformazione (1 — 1) della varietà nello spazio aritmetico ad n dimensioni; G_2 : Ogni trasformazione di coordinate da un sistema « privilegiato » ad un altro appartiene a G ; G_3 : Ogni sistema coordinato ottenuto da un sistema « privilegiato » con una trasformazione di G è privilegiato; G_4 : Vi è almeno un sistema « privilegiato ».

Gli assiomi precedenti vanno modificati (ved. p. 29) ad es. per le geometrie *proiettiva* e *conforme*, in quanto è con spazi aritmetici d'altra natura — quelli di un sistema di coordinate *omogenee* indipendenti, o di coordinate *sovrabbondanti*, legate da relazioni assegnate — che allora riesce possibile realizzare una corrispondenza (1 — 1) senza elementi singolari.

A considerazioni d'indole più generale si passa nei Cap. III e IV. Inteso che nello spazio aritmetico n -dimensionale venga detta n -cellula cubica (box) la totalità dei punti x^i soddisfacenti a limitazioni del tipo $|x^i - x_0^i| < \delta$; *regione* una totalità di punti tali che ciascuno sia centro di una n -cellula cubica appartenente alla totalità medesima; che si dica di *classe* u una trasformazione $y^i = y^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$ quando i secondi membri esistono e sono continui (entro una certa regione) con le loro derivate d'ordine $\leq u$, *regolare* se inoltre è biunivoca e ad Jacobiano sempre $\neq 0$, viene chiamata *varietà semplice di classe* u uno spazio pel quale sussistono gli assiomi G_i poco sopra riportati, quando per gruppo G si assuma il gruppo di tutte le trasformazioni regolari di classe u dello spazio aritmetico in sè. Classi particolari di varietà semplici si avranno sostituendo al gruppo ora detto un suo sottogruppo; ad es. si hanno le varietà semplici *orientate* se in G si comprendono soltanto le trasformazioni regolari *dirette*, ad Jacobiano > 0 .

La varietà semplice è, per definizione, omeomorfa allo spazio aritmetico d'egual numero di dimensioni, cosicchè per essa esistono sistemi coordinati (privilegiati) nei quali *tutti* i punti della varietà sono rappresentati. Ma l'uso di altri sistemi coordinati dotati di assai più larga arbitrarietà, e atti invece a rappresentare *soltanto una parte* della varietà sullo spazio aritmetico (o su una sua regione) è spesso più vantaggioso. Sono questi i sistemi coordinati « ammissibili » (allowable), caratterizzati dalle seguenti condizioni: 1. Se $[P]$ è l'immagine, in un sistema coordinato « privilegiato » K , di una regione aritmetica $[x]$, la corrispondenza $P \rightarrow x$ determinata da K è un sistema coordinato « ammissibile »; 2. Se $[x]$ è una regione aritmetica, $P \rightarrow x$ un sistema coordinato « ammissibile », e $x \rightarrow y$ una trasformazione regolare di classe u , la trasformazione risul-

tante $P \rightarrow y$ è un sistema coordinato « ammissibile ». Ogni sistema coordinato « ammissibile » è dunque una corrispondenza $(1-1)$ fra una totalità $[P]$ di punti della varietà e una totalità $[x]$ di punti aritmetici. Si dirà che $[P]$ è il dominio, e $[x]$ è il dominio aritmetico del sistema coordinato.

Diciamo, con gli AA., *n-cellula aritmetica* di classe u una regione dello spazio aritmetico in corrispondenza $(1-1)$ di classe u con una *n-cellula cubica*; in una varietà semplice di classe $u' \geq u$, chiamiamo *n-cellula di classe u* l'immagine di una *n-cellula aritmetica* di classe u in un sistema « ammissibile ». E diciamo una proprietà *locale* in un punto P quando esiste una *n-cellula* C_P contenente P , tale che la proprietà supposta sia comune a tutte le regioni contenenti P e contenute in C_P .

In una varietà semplice la struttura locale in un punto può esprimersi mediante un opportuno sistema coordinato « ammissibile » il cui dominio contenga il punto supposto; e può anche dedursi dalla struttura integrale della varietà, esprimibile mediante l'uso di un sistema « privilegiato » di coordinate. Ma si presentano spazi, di natura anche molto semplice, che non soddisfano agli assiomi G_+ ; cioè, non ammettono sistemi « privilegiati » di riferimento, non essendo omeomorfi a spazi aritmetici (nel senso in cui questa denominazione è intesa dagli AA.). Tali sono ad es. gli spazi proiettivi. Un altro esempio interessante è offerto dagli spazi che gli AA. chiamano (p. 45) *localmente affini*, in quanto localmente soltanto presentano le peculiarità di uno spazio affine ⁽¹⁾.

Tali spazi rientrano in una classe assai generale di varietà che gli AA. chiamano *varietà regolari* (Cap. VI). La nozione di varietà regolare, e insieme, quella di sistema coordinato « ammissibile » per una tale varietà, sono descritte mediante tre gruppi d'assiomi. Il primo (A) serve a fissare le caratteristiche locali dei sistemi « ammissibili », cioè, a caratterizzare la classe dei sistemi « ammissibili » che hanno per domini delle *n-cellule* ⁽²⁾. Il secondo (B) esprime che la totalità dei sistemi « ammissibili » si costruisce

⁽¹⁾ Degli esempi sono dati a p. 45. Di molti altri interessanti modelli concreti dei vari schemi generali l'opera è ricca: debbo tacerne per brevità.

⁽²⁾ A_1 : La trasformazione di coordinate fra due sistemi « ammissibili » aventi lo stesso dominio è regolare, purchè uno almeno dei due sistemi abbia una regione quale suo dominio aritmetico; A_2 : Ogni sistema ottenuto da un sistema « ammissibile » con una trasformazione regolare è un sistema « ammissibile »; A_3 : Un sistema « ammissibile » subordina fra una *n-cellula* e la sua immagine aritmetica una corrispondenza che è essa stessa un sistema « ammissibile ».

mediante *unione* di sistemi ammissibili che hanno per domini delle n -cellule ⁽¹⁾. Gli assiomi del terzo gruppo (C) sono di carattere *topologico*, e riguardano la costituzione della varietà come *aggregato di n -cellule*: C_1 : Due n -cellule aventi a comune un punto hanno a comune una n -cellula che lo contiene; C_2 : Se due punti P, Q sono distinti, esistono due n -cellule che li contengono e non hanno alcun punto a comune; C_3 : Esistono almeno due punti.

Questi assiomi comprendono in particolare quelli posti da HAUSDORFF per caratterizzare gli spazi topologici. Fra le altre conseguenze notiamo:

Vi è un sistema coordinato « ammissibile » in cui due qualunque punti sono entrambi rappresentati. Ogni regione di una varietà regolare (contenente almeno un punto) è essa stessa una varietà regolare.

Il precedente schema dà luogo a un tipo concreto di geometria differenziale quando agli assiomi A, B, C si aggiungano *ulteriori condizioni*, che potranno essere d'indole *locale* o *topologica*. Quali esempi si accennano (fra l'altro) (Cap. VII) quelli, ancora assai generali, delle *varietà orientabili*, e delle *geometrie a connessione*, che si ottengono associando ai punti della varietà degli spazi a gruppo fondamentale — ad es. gli *spazi tangenti* (ved. Cap. V) — e inoltre, una classe di rappresentazioni (del gruppo fondamentale) fra gli spazi associati a punti distinti.

ENEA BORTOLOTTI

P. MONTEL: *Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes*, avec une Note de H. CARTAN. Paris, Gauthier-Villars, 1933 (pagg. IV+159. Fr. 40).

In questa nuova pregevole monografia che va ad arricchire la « Collezione Borel », vediamo riprodotto, con alcune modificazioni, un corso di lezioni fatte alla Sorbona nell'inverno 1929. L'illustre Autore continua ad approfondire lo studio delle funzioni analitiche nel quale da tanti anni egli ha fatto convergere i suoi sforzi.

Qui vengono investigate le proprietà delle funzioni olomorfe o meromorfe a seconda del numero di volte che esse assumono medesimi valori in un certo campo, a seconda cioè del loro *ordine*.

⁽¹⁾ Se $P \rightarrow x, Q \rightarrow y$ sono due sistemi « ammissibili » tali che, se P, Q hanno una parte R a comune, ogni punto di R sia rappresentato da *uno stesso punto aritmetico* z nei due sistemi, esiste un sistema coordinato che subordina fra P ed x , fra Q ed y le stesse corrispondenze date dai due sistemi supposti: esso vien detto *unione* dei due sistemi.

di *multivalenza*, terminologia introdotta dall'A. in lavori fondamentali (¹).

Il fatto che una qualunque funzione analitica possa considerarsi uniforme supponendola definita sopra una conveniente superficie di RIEMANN, conduce spontaneamente a chiedersi se l'insieme dei valori che la funzione assume possa distribuirsi in un certo numero di domini corrispondenti, uno per ciascuno, ai fogli di detta superficie. In altre parole, è possibile scomporre il dominio in cui è definita la funzione inversa in un certo numero di domini, in ciascuno dei quali detta funzione sia *univalente*, cioè non assuma due volte nessuno dei suoi valori? È dovuto al MARTY (²) un procedimento particolare mediante il quale ogni dominio in cui una funzione $f(z)$ è regolare può essere (in infiniti modi) scomposto in domini (« cellule ») d'univalenza di $f(z)$. Così proprietà locali ben note, relative ai punti critici algebrici e algebroidi, si estendono alla intera regione di regolarità. « Ma tutto lo studio delle funzioni », afferma l'A. (pag. III), « può dividersi in due parti: da una parte l'esame delle singolarità che le caratterizzano, conferendo a quelle di uno stesso gruppo la loro propria individualità; dall'altra parte l'esame delle loro proprietà comuni nelle regioni di regolarità. Ed è a questo secondo punto di vista che è consacrato il libro ».

Nel Cap. I, dopo aver ricordate succintamente le proprietà più elementari della corrispondenza analitica (*rappresentazione conforme* nel caso delle funzioni univalenti), l'A. dà le definizioni fondamentali di cui abbiamo parlato e studia la composizione e il passaggio al limite delle funzioni aventi determinati ordini di multivalenza. Passa poi alla dimostrazione di alcuni teoremi relativi ai domini convessi. Notevole è la proposizione, dedotta da un teorema di STUDY, che se una funzione è olomorfa ed univalente nell'intorno di un punto, essa rappresenta sempre su un dominio convesso un cerchio abbastanza piccolo avente il centro in quel punto.

Il Cap. II tratta dell'ordine di multivalenza dei polinomi. Da un teorema fondamentale sui polinomi apolari, dovuto a J. H. GRACE, si deducono dapprima una proprietà relativa alle radici della deri-

(¹) *Sur les familles quasi-normales de fonctions holomorphes*, (« Mémoires de l'Acad. royale de Belgique », Classe des Sciences, 2^e série, t. VI, 1922, pagg. 1-41); *Sur les domaines formés par les points représentant les valeurs d'une fonction analytique*, (« Annales de l'École Norm. sup. », 3^e série, t. XLVI, 1929, pagg. 1-23).

(²) F. MARTY, *Recherches sur la répartition des valeurs d'une fonction méromorphe*. (« Annales de Toulouse », 3^e série, t. XXIII, 1931, pp. 183-261).

vata $f'(z)$ di un polinomio $f(z)$ che assume lo stesso valore nei punti -1 e $+1$ (interessante generalizzazione del teorema di ROLLE) ed un'altra relativa alla composizione dei polinomi. Si passa poi alla dimostrazione di proprietà sufficienti affinché un cerchio di centro l'origine sia dominio d'ordine p di multivalenza per un determinato polinomio del quale l'origine sia radice di molteplicità p .

Il valore metodologico della teoria delle famiglie normali e quasinormali riceve una nuova conferma nel Cap. III (si sa quale solidarietà unisce le funzioni analitiche che, in uno stesso dominio, non assumono certi valori detti eccezionali, o non li assumono che un numero limitato di volte). Si dimostra dapprima che le funzioni $f(z)$ olomorfe ed univalenti nel cerchio unità, che nell'origine sono nulle ed hanno derivata uguale ad 1, costituiscono una famiglia (E) normale e se ne deduce che i valori assunti da queste funzioni ricoprono sempre un cerchio fisso di centro l'origine. Si passa poi a studiare, dal medesimo punto di vista, le funzioni olomorfe (o meromorfe) in uno stesso dominio.

Il Cap. IV comincia con l'approfondire lo studio delle funzioni della famiglia (E), dimostrando che esse sono limitate nel loro insieme in ogni dominio completamente interno al cerchio unità. L'A. ripete qui la dimostrazione di un teorema fondamentale della teoria delle famiglie normali ⁽¹⁾, in cui questa proposizione rientra come caso particolare ⁽²⁾.

Continua poi a diffondersi a lungo sulla famiglia (E), della quale riesce a stabilire molte altre notevoli proprietà (limitazioni per i primi coefficienti, per le derivate successive, per i moduli delle funzioni, per la lunghezza del raggio del cerchio sempre coperto di cui al Capitolo precedente, ecc.), e di altre famiglie particolari di funzioni univalenti, per es. quella delle funzioni

$\varphi(z) = z + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$ che sono univalenti nel dominio $|z| > 1$

⁽¹⁾ P. MONTEL, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*. (« Collection Borel », 1927, pag. 35).

⁽²⁾ Un dubbio che è stato sollevato intorno al rigore delle dimostrazioni di questa come di altre proposizioni importanti della teoria delle famiglie normali (cfr. S. MINETTI, *Su alcuni teoremi delle famiglie normali di funzioni analitiche anche in relazione al postulato di Zermelo* (« Atti del Congresso internazionale di Zurigo », 1932)), mi pare in realtà inconsistente. V. la Nota di B. LEVI e T. VIOLA, *Intorno ad un ragionamento fondamentale nella teoria delle famiglie normali di funzioni*, in questo stesso fascicolo del « Bollettino ».

quella delle funzioni che sono meromorfe ed univalenti nel piano quando vi sia praticato un taglio rettilineo, ed altre.

Il Cap. V tratta dei domini d'univalenza o di multivalenza di certe funzioni. Per le funzioni intere di uno stesso ordine finito φ , si dimostra che esse sono univalenti in un angolo avente vertice nell'origine. Da funzione a funzione possono variare sia la direzione della bisettrice di quest'angolo sia la sua ampiezza, ma questa non può superare mai il valore $\pi\left(2 - \frac{1}{\varphi}\right)$. Questo limite superiore è d'altronde un massimo che può essere effettivamente raggiunto, come l'A. dimostra utilizzando certe funzioni d'ordine φ (di MITTAG-LEFFLER), univalenti in un angolo d'ampiezza uguale a $\pi\left(2 - \frac{1}{\varphi}\right)$.

$$E_{\varphi}(z) = \varphi e^{z^{\varphi}} + \frac{\varphi}{2\pi i} \int_{(\gamma)} \frac{e^{z^{\varphi}} d\zeta}{\zeta - z}.$$

Si determina poi una limitazione superiore e una inferiore per il raggio del cerchio di centro l'origine nel quale una funzione $f(z)$ analitica regolare per $z=0$ è univalente. La limitazione è fatta in funzione dei coefficienti dello sviluppo in serie di $f(z)$ e del suo massimo modulo nel cerchio unità. Ogni famiglia di funzioni olomorfe e limitate nel cerchio unità e senza limite costante, ammette un *nocciolo di multivalenza d'ordine p* (qualunque sia p). Esiste cioè un numero φ_p tale che ogni funzione della famiglia è multivalente d'ordine p nel cerchio $|x| \leq \varphi_p$. Questo raggio φ_p è uguale alla radice compresa fra 0 ed 1 dell'equazione reciproca

$$\varphi^{2p} + \varphi^{2p-2} + \dots + \varphi^4 + \varphi^2 + 1 = (p+1)M\varphi^p.$$

M essendo un limitante superiore per i moduli di tutte le funzioni della famiglia.

Le funzioni univalenti sono anche caratterizzate da proprietà estremali, del cui studio si occupa il Cap. VI. L'area della superficie coperta dai valori che una funzione olomorfa $f(z)$, tale che $f'(0)=1$, assume in un cerchio $|z| \leq R$, è superiore o uguale a quella del cerchio; l'uguaglianza si ha solo per la funzione $f(z)=z$ (SCHWARZ, BIEBERBACH). Altre proprietà estremali notevoli sono dimostrate più generalmente per una famiglia di funzioni olomorfe in un dominio semplicemente connesso (d) , le cui derivate in un punto fisso z_0 di (d) hanno un valore fisso. Le aree coperte dai valori di queste funzioni in (d) ammettono un limite inferiore positivo effettivamente raggiunto da una funzione $\varphi(z)$ che fa la rappre-

sentazione conforme di (d) su un cerchio, in modo che z_0 corrisponde al centro del cerchio. Sotto convenienti ipotesi, $\varphi(z)$ si può approssimare mediante polinomi soddisfacenti ad importanti proprietà.

Il Cap. VII studia in modo speciale i domini coperti dai valori assunti dalle funzioni che sono analitiche regolari in uno stesso campo.

Il libro, nuovo documento della mente mirabilmente sintetica dell'Autore, termina con un lungo ed interessante articolo dal titolo: *Sur la possibilité d'étendre aux fonctions de plusieurs variables complexes la théorie des fonctions univalentes*, dovuto alla penna di HENRI CARTAN, la cui competenza in simili argomenti è ben nota.

TULLIO VIOLA

R. RISSER et C. E. TRAYNARD: *Les principes de la Statistique mathématique*. Paris, Gauthier-Villars, 1933, pagg. XI+338.

Si potrebbe dire che in questo fascicolo sia contenuta la parte teorica degli argomenti svolti in quello già pubblicato col titolo: *Applications de la Statistique à la Démographie et à la Biologie*. Esso porta un contributo importante al I Tomo del noto *Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications*, raccolto da E. BOREL, e crea un certo equilibrio ai molti trattati riguardanti le applicazioni, già contenuti nei tomi successivi.

La trattazione teorica è resa interessante e piana, anche per i pratici, mediante opportuni esempi molto ben scelti e che pongono il lettore in condizione di poter facilmente usare le teorie esposte o lo rendono attento alla circostanza che nelle applicazioni della teoria statistica, è necessario di tener costantemente presente la realtà dei fatti.

Sono opportunamente citate le varie tendenze e nominati i maggiori capiscuola.

Il lavoro è diviso in due parti: nella prima, ammesso noto al lettore il calcolo delle probabilità, si espongono brevemente, ma chiaramente, i principali concetti teorici della statistica: medie, momenti, funzioni caratteristiche, curve (a distribuzione normale o no). Si discutono a fondo i problemi relativi alla ricerca delle cause di frequenze rappresentate da curve che si presumono composte, citando i metodi del PEARSON, del SHEPPARD ed altri e si chiude con un accenno ad alcune proprietà notevoli che legano le ascisse dei punti di inflessione delle curve e le costanti del problema (E. BOREL).

Nella seconda parte si tratta ampiamente della correlazione e

della covariazione. Messo bene in chiaro, nel primo capitolo, l'oggetto del problema, si ricordano i metodi vecchi usati per il calcolo degli indici di dipendenza di due serie statistiche. Il secondo e terzo capitolo sono dedicati ad un esame profondo dei legami stocastici e dei legami funzionali; il quarto alle tavole a doppia entrata ed in special modo al calcolo del « quadrato medio di contingenza ».

La discussione sulle probabilità a priori risultanti dai calcoli fatti sui dati dell'esperienza formano oggetto del quinto capitolo, e la legge di LAPLACE-GAUSS estesa allo spazio ad n dimensioni quello del sesto. In quest'ultimo poi si confrontano le idee fondamentali della scuola di GALTON-PEARSON con quelle della scuola di GAUSS e di BRAVAIS.

Nel capitolo settimo si usa il metodo delle differenze per il calcolo dei coefficienti di covariazione.

Corona la seconda parte una nota secondo lo STEFFENSEN, dell'Università di Copenaghen, su di un nuovo indice di misura della dipendenza in correlazione della quale, dopo di aver introdotto il nuovo coefficiente ψ , lo si pone in relazione con i ritrovati di TSCHUPROW.

Gli Autori chiudono il libro riportando i concetti svolti dal GULDBERG in un corso di conferenze tenuto all'Istituto Poincaré, nel quale vennero messi in luce alcuni criteri che permettono di riconoscere se una serie statistica è rappresentabile con una funzione binomiale di POISSON, di PASCAL, di BRUNS-CHARLIER od ancora con una funzione ipergeometrica.

Il presente fascicolo, che dà un concetto chiaro dello stato attuale delle teorie statistiche, con speciale riguardo allo sviluppo delle idee più recenti, ha il pregio di considerare anche quelle tendenze che fin poco tempo fa, pur non essendo ignorate, non erano messe nel dovuto rilievo nei trattati classici. Non dubitiamo che esso diventerà un prezioso strumento per quanti si occupano dell'argomento, sia dal punto di vista teorico, che da quello delle applicazioni.

BRUNO TEDESCHI

R. BRUNETTI: *L'Atomo e le sue radiazioni*. Un volume delle « Pubblicazioni dell'Istituto Nazionale di Ottica di Firenze ». Editore Nicola Zanichelli, Bologna, 1932.

Si compone dei seguenti Capitoli: I. L'atmosfera elettronica dell'atomo. - II. Il nucleo atomico. - III. L'origine del quanto d'energia e la determinazione del quanto d'azione. - IV. I livelli energetici interni dell'atomo e il processo d'emissione dei raggi X

caratteristici. - V. I potenziali critici degli elementi e i livelli energetici esterni degli atomi. - VI. I livelli dei metalli alcalini e delle loro sequenze isoelettroniche. - VII. Confronto fra i livelli interni degli atomi pesanti e gli esterni degli atomi a un solo elettrone ottico. Il sistema periodico degli elementi. - VIII. I momenti magnetici dell'atomo e l'effetto Zeeman. - IX. Il modello vettoriale dell'atomo. - X. Sugli atomi a più di un elettrone ottico. - XI. Il campo elettrico e le righe spettrali. - XII. Magnetismo e spettroscopia.

Nella prefazione di questo bel libro l'A. pone giustamente in rilievo il contributo apportato alle nuove meccaniche dal principio d'imprecisione dell' HEISENBERG (Heisenbergs Unschärferelation); contributo anche filosofico, sul quale venne arrecata vivida luce suggestiva da riflessioni varie dello stesso HEISENBERG e di altri eminenti Autori, tra cui figurano in prima linea il DE BROGLIE e lo SCHRÖDINGER.

Non a torto, in fatto di atomismo contemporaneo, si parla di una reazione tutta filosofica, la quale avrebbe determinato le ricerche dell' HEISENBERG ⁽¹⁾. Reazione di certo contro l'invocamento di gratuite analogie fra macrocosmo e microcosmo, la quale s'imponesse per consentire la costruzione di uno schema teorico sulla base di concreti esperimenti fisici. Questo schema teorico involge ormai tutto un insieme di procedimenti matematici; procedimenti che, pure in attesa di una sistemazione (forse non raggiungibile nel travolgente succedersi delle vedute fisiche), rappresentano un meraviglioso frutto del pensiero umano nell'indagine dei fenomeni naturali ⁽²⁾.

In tale indagine l'accorto sperimentatore non rinunzia alle previsioni concrete del teorico, ma si premunisce contro inutili

⁽¹⁾ Cfr. G. BACHELARD, *Les intuitions atomistiques*. [« Bibliothèque de la Revue des Cours et Conférences »], Paris (1933), p. 158.

⁽²⁾ A proposito di detta sistemazione giova consultare i « Rapporti di BEPPO LEVI » comparsi nell'« Annuario scientifico e industriale ». Dei quali ci piace riportare le seguenti parole, con cui viene iniziato il rapporto « Fondamenti della logica e fondamenti della meccanica quantica »: « Ci pare di potere assumere come nota fondamentale del nostro Rapporto per il 1927 lo sforzo di applicare a due rami collaterali alla matematica propria — e posti in verità, si dovrebbe ritenere, ai due estremi opposti del tronco ideale — l'apparente caratteristica formale per cui la matematica si presenta anzitutto come un sistema di operazioni e di simboli. Dei quali due rami, l'uno si stacca dal tronco immediatamente alla radice: vogliamo dire la logica matematica e la teoria degli aggregati; l'altro, la fisica teorica, appare al contrario uno dei più elevati e giovani germogli ».

divagazioni praticando, per dirla col LODGE, una vera politica di esclusione.

Di codesta politica ha sagacemente profittato la BRUNETTI nel redigere il suo libro; il quale rappresenta, anche fuori della scuola, una guida preziosa nel campo della spettroscopia atomica, campo fra quelli prediletti dalla stessa A. nelle sue rimarchevoli ricerche sperimentali.

U. CRUDELI
