
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

VINCENZO AMATO

Sulls definizioni di funzioni di matrici nel corpo complesso

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **12** (1933), n.4, p. 243-249.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_4_243_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_4_243_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RELAZIONI SCIENTIFICHE

Sulle definizioni di funzioni di matrici nel corpo complesso (*).

1. Data una matrice

$$A = \| a_{rs} \|$$

di ordine n , se le sue radici caratteristiche $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ sono semplici, si può trasformare la A nella forma (canonica):

$$X = \left\| \begin{array}{cccc} \rho_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \rho_n \end{array} \right\|.$$

Data una funzione $f(x)$, il GIORGI ⁽¹⁾ chiama *funzione della matrice* X , e la indica con $f(X)$, la matrice

$$\left\| \begin{array}{cccc} f(\rho_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\rho_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f(\rho_n) \end{array} \right\|.$$

Egli chiama poi *funzione di* A , e la indica con $f(A)$, la matrice

$$f(A) = Uf(X)U^{-1},$$

essendo U una matrice che trasforma la A nella X .

Si può subito osservare che se la f è una funzione analitica qualunque, in generale non avviene che una matrice propria

(*) Sunto di una Conferenza tenuta al Seminario Matematico dell'Università di Catania il 9 Marzo 1933-(XI).

(¹) G. GIORGI, *Sulle funzioni delle matrici*. « Rendic. R. Acc. Lincei », vol. VII, serie 6^a, 1928, pp. 178-184. Egli dà prima una definizione geometrica che poi trasforma in enunciati algebrici per la $f(X)$ e per la $f(A)$.

commutabile con la X sia pure commutabile con la $f(X)$ e quindi la definizione data per la $f(A)$ non è indipendente dalla scelta della U .

Ne segue che, soltanto per la classe di funzioni tali che ogni matrice propria commutabile con la X sia pure commutabile con la $f(X)$, nel caso in cui le radici caratteristiche $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ siano distinte e la $f(x)$ sia definita per $x = \rho_1, x = \rho_2, \dots, x = \rho_n$, il GIORGI dà una definizione in forma esplicita della $f(A)$.

Egli accenna anche all'estensione da farsi nel caso in cui le radici caratteristiche non siano distinte, ma ritorna sull'argomento in una seconda Nota ⁽²⁾, posteriore a quella del FANTAPPIÉ che sarà citata più innanzi.

In questo secondo lavoro, considerando separatamente ciascuna delle matrici Φ_i (che compongono la matrice X) con p elementi tutti eguali alla radice caratteristica ρ_i , nella diagonale principale, e con $p - 1$ elementi tutti eguali a 1, nella parallela consecutiva, e con gli altri tutti zero, egli pone:

$$f(\Phi_i) = \begin{vmatrix} f(\rho_i) & f'(\rho_i) & \frac{f''(\rho_i)}{2!} & \dots & \frac{f^{(p-1)}(\rho_i)}{(p-1)!} \\ 0 & f(\rho_i) & f'(\rho_i) & \dots & \frac{f^{(p-2)}(\rho_i)}{(p-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\rho_i) \end{vmatrix}.$$

Il GIORGI non dà, in nessuno dei due casi, la matrice $f(X)$ come somma di matrici $f(X_i)$ convenientemente definite (art. 5), tutte di ordine n , e inoltre la definizione da lui data deve essere accompagnata dalla ipotesi restrittiva suddetta.

2. Il FANTAPPIÉ ⁽³⁾ suppone di avere stabilito una corrispondenza fra ogni funzione analitica $f(x)$, data in un certo campo, e una matrice di ordine n , che indica con $f(A)$, in modo da soddisfare alle seguenti proprietà:

1°) ad una costante k deve corrispondere la matrice kJ , essendo J la matrice unitaria di ordine n ;

2°) alla variabile x deve corrispondere la matrice A ;

3°) alla somma $f(x) + g(x)$ di due funzioni deve corrispondere

⁽²⁾ G. GIORGI. *Nuove osservazioni sulle funzioni di matrici*. « Rendic. R. Acc. Lincei », vol. VIII, serie 6^a, 1928, pp. 3-8.

⁽³⁾ L. FANTAPPIÉ, *Le calcul des matrices*. « Comptes Rendus de l'Acc. des Sciences », t. 186, 1928, p. 619.

la matrice $f(A) + g(A)$, essendo $f(A)$ e $g(A)$ rispettivamente corrispondenti alle funzioni $f(x)$ e $g(x)$;

4°) al prodotto $f(x) : g(x)$ di due funzioni deve corrispondere la matrice $f(A) \cdot g(A)$, ove il prodotto sia eseguito per righe e colonne;

5°) se $f(x)$ è funzione analitica di un parametro x , la matrice corrispondente deve pure dipendere analiticamente da x , cioè tutti i suoi elementi debbono essere funzioni analitiche di x .

Gli elementi f_{rs} della matrice $f(A)$ dipenderanno da $f(x)$, cioè saranno *funzionali* di $f(x)$.

Il FANTAPPIÈ applica a questi funzionali che, per la quinta proprietà, saranno anche analitici, nel senso da lui stabilito in un lavoro precedente ⁽⁴⁾, e lineari per la terza proprietà, alcuni risultati generali sui funzionali analitici lineari che bastano per determinarli.

Egli trova così che f_{rs} è la somma dei residui delle funzioni

$$-\frac{D_{rs}(x)}{D(x)} f(x),$$

relativi alle radici caratteristiche di A , essendo

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

e $D_{rs}(x)$ l'aggiunto, nel determinante $D(x)$, dell'elemento che sta sulla s^{ma} riga e sulla r^{ma} colonna.

Viene così ad esser definita la $f(A)$ nell'ipotesi che $f(x)$ sia ad un valore (o sia un ramo monodromo di una funzione a più valori).

3. Il CARTAN ⁽⁵⁾, restando ferma l'ipotesi precedente sulla $f(x)$ e supponendola regolare in un campo contenente una curva chiusa e rettificabile Γ , propone di porre

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi J - A} d\xi,$$

senza però precisare meglio il cammino Γ d'integrazione.

⁽⁴⁾ L. FANTAPPIÈ, *I funzionali analitici*. Conferenza tenuta al Seminario Matematico dell'Università di Roma (serie 2ª, vol. IV, 1925-26); v. anche la sua Memoria, con lo stesso titolo, pubblicata nelle « Mem. R. Acc. dei Lincei », vol. III, fasc. 11, 1928-30.

⁽⁵⁾ In una lettera scritta al prof. GIORGI (cfr. Nota citata in ⁽²⁾).

Questa definizione deriva dalla nota formola (di CAUCHY)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - x} d\xi$$

che dà il valore di una funzione analitica, regolare in tutto un campo, compreso il suo contorno Γ , percorso nel verso positivo, in ogni punto x interno al campo.

4. Il GIORGI, nella seconda sua Nota citata, rileva che le formole del FANTAPPIÈ e del CARTAN non danno tutte le valutazioni multiple di $f(A)$, se esistono, consentite dalla definizione data dal GIORGI stesso.

Egli rileva ancora che, per applicare le dette formole, occorre risolvere l'equazione fondamentale e fare intervenire irrazionalità anche nel caso in cui il risultato dovrebbe esserne indipendente.

Vedremo appresso (art. 7) che il CIPOLLA, occupandosi del primo rilievo del GIORGI, riesce a modificare la formola del FANTAPPIÈ e del CARTAN in modo da ottenere tutte le determinazioni di $f(A)$ e, a proposito del secondo rilievo, esamina un caso particolare in cui si può determinare $f(A)$ senza risolvere l'equazione caratteristica di A .

5. Nel caso in cui la matrice sia sotto forma canonica

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \varepsilon_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

e siano $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ le radici caratteristiche distinte, io ho chiamato X_i la matrice quadrata di ordine n con gli elementi tutti nulli, tranne quelli che occupano egual posto degli elementi non nulli delle righe della X aventi per elemento principale la radice caratteristica ε_i e che sono eguali ad essi, e con J_i la matrice quadrata di ordine n con gli elementi tutti nulli, tranne quelli che occupano egual posto degli elementi principali non nulli di X_i e che sono eguali ad 1 ⁽⁶⁾.

(⁶) V. AMATO, *Sulla risoluzione di equazioni nel campo delle matrici complesse*, « Boll. dell'Acc. Gioenia », fasc. 62, serie 2^a, Catania, 1932. La mia Nota è stata scritta prima che io avessi notizia dei lavori del prof. GIORGI.

Ne segue, se J è la matrice identica:

$$J = J_1 + J_2 + \dots + J_v, \quad X = X_1 + X_2 + \dots + X_v.$$

Sia

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\rho_i)}{k!} (x - \rho_i)^k$$

lo sviluppo in serie di $f(x)$ nell'intorno di una radice caratteristica multipla ρ_i (supposto punto regolare di $f(x)$).

Si ponga:

$$f(X_i) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\rho_i)}{k!} (X_i - \rho_i J_i)^k.$$

Le potenze $(X_i - \rho_i J_i)^k$, dà un certo punto in poi, sono tutte nulle e precisamente se le catene relative a ρ_i si suppongono ordinate per valori non crescenti dei loro ordini e se l'ordine massimo di esse è r_i , si avrà che, per $k > r_i$, le potenze suddette sono tutte nulle.

Nel caso che ρ_i sia semplice ($r_i = 1$) basta supporre che $f(\rho_i)$ abbia valore finito.

In ogni caso si ha:

$$f(X_i) = \sum_{k=0}^{r_i-1} \frac{f^{(k)}(\rho_i)}{k!} (X_i - \rho_i J_i)^k.$$

In questo modo viene anche definita la matrice $f(X)$ di X mediante la formola

$$f(X) = f(X_1) + f(X_2) + \dots + f(X_v).$$

Si potrebbe facilmente dimostrare che se per un punto α della regione in cui la f è regolare (includente tutte le radici caratteristiche) si ha:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} (x - \alpha)^k$$

e se, sostituendo in $(x - \alpha)^k$ al posto di x la matrice X e al posto di α la matrice αJ , la matrice che ne risulta ha un senso, essa coincide con la $f(X)$ sopra definita.

6. Il CIPOLLA (7), nel caso in cui la matrice A abbia la forma canonica X , dà una definizione della matrice $f(X)$ non diversa essenzialmente da quella dell'articolo precedente.

(7) M. CIPOLLA, *Sulle matrici espressioni analitiche di un'altra*. « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », tomo LVI (1932).

Egli considera il caso che la radice ρ_i abbia nella X una sola catena, cioè che gli elementi contigui a destra di ρ_i siano eguali ad 1 (salvo l'ultimo), ma ciò non lede la generalità della trattazione.

Il CIPOLLA considera anche il caso in cui $f(x)$ sia ad m valori e fra le m^v determinazioni che si possono allora avere per $f(X)$ ne definisce m come *principali*: quelle in cui la f ha la stessa determinazione per tutte le $f(X_i)$.

Le m^v determinazioni le chiama *matrici espressioni analitiche primitive* $f(X)$ di X e la classe di matrici

$$T^{-1}f(X)T,$$

essendo T una matrice che trasforma X in sè stessa, la chiama *espressione analitica generale* $f^*(X)$ di X .

Sicchè abbiamo un'espressione analitica particolare $f(X)$ di X , che è una matrice ben definita, e un'espressione analitica generale $f^*(X)$ di X , che è una classe di matrici.

In corrispondenza della prima si ha un'espressione analitica particolare

$$f(A) = Uf(X)U^{-1}$$

di A , essendo U una matrice che trasforma A nella forma canonica X , e in corrispondenza della seconda un'espressione analitica generale

$$f^*(A) = Uf^*(X)U^{-1}.$$

Nel caso di polidromia la $f(A)$ sopra definita, si dirà *determinazione principale* di $f^*(A)$ quando per la $f(X)$ si assuma una determinazione principale.

Il CIPOLLA dimostra poi questo elegante teorema:

Se in un elemento analitico di $f(x)$, ponendo A in luogo di x , si ottiene un'espressione avente significato come matrice ⁽⁸⁾, questa è una determinazione principale di $f(A)$.

Nel caso di una funzione ad un valore o di un ramo monodromo di una funzione a più valori, si ha la $f(A)$ prima definita che coincide con quella del FANTAPPIÈ e del CARTAN supponendo la f regolare in una regione includente le radici caratteristiche di A .

(8) Il prof. G. CATALANO, in un lavoro di prossima pubblicazione, si occuperà della determinazione della regione dei punti α regolari per la $f(x)$ e tali che la matrice $F(X)$, corrispondente all'elemento analitico in α , abbia senso.

7. Il CIPOLLA, occupandosi dei rilievi del GIORGI (art. 4), dà tutte le determinazioni di $f(A)$ mediante la formola

$$f(A) = U \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi J_1 - X_1} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi J_2 - X_2} d\xi + \dots + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi J_v - X_v} d\xi \right\} U^{-1}$$

che qui riportiamo lievemente modificata e scritta con le nostre notazioni (art. 5).

Quanto al secondo rilievo del GIORGI, nel caso particolare che le radici ρ_i siano semplici e che esista un cerchio con centro in un punto α del campo di razionalità cui appartengono la matrice e tutti i coefficienti di un elemento analitico $f(x)$, cerchio includente tutte le radici ρ_i e nel quale $f(x)$ sia regolare, il CIPOLLA dimostra la possibilità di determinare $f(A)$ senza risolvere l'equazione caratteristica di A .

8. Data la matrice nulla (dell'ordine n) e data, ad esempio, la funzione $\sqrt{x}$, il metodo esposto all'art. 6 non fornisce che una sola determinazione per la matrice $\sqrt{X}$, essendo X ad elementi tutti nulli, cioè fornisce la stessa matrice nulla.

Ci sono però altre matrici dell'ordine n (pseudo-nulle) che, elevate a quadrato, danno la matrice nulla, ad esempio

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Sarebbe quindi interessante la ricerca delle matrici espressioni analitiche di un'altra X che non rientrano nella definizione del CIPOLLA, e che perciò non possono riguardarsi come espressioni analitiche di X .

VINCENZO AMATO

Relazione Scientifica a pag. 159: Osservazione. — A proposito dei « teoremi tauberiani », dei quali parlo nell'ultima parte della mia relazione sulle *serie di Dirichlet* (v. questo « Bollettino », p. 166), è necessario citare l'importante Memoria di N. WIENER, *Tauberian theorems*, pubblicata negli « Annals of Math. » dello scorso anno (t. 33, 1932, pp. 1-100), e che disgraziatamente mi era rimasta ignota.

WLADIMIRO BERNSTEIN