Ugo Broggi

Su di una proprietà dei numeri binomiali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **12** (1933), n.4, p. 241–242.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_4_241_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1933.

Su di una proprietà dei numeri binomiali.

Nota di U. BROGGI (a Milano).

Sunto. - *Si dimostra, con un procedimento analitico, la nota formula*

$$\binom{n}{1}1^h - \binom{n}{2}2^h + \dots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}n^h = 0,$$

in cui h *è un intero positivo minore di* n.

Sia $h = 1, 2, \dots, n-1$. È noto che si dimostra la formula

$$(1) \qquad \sigma_h = \binom{n}{1}1^h - \binom{n}{2}2^h + \dots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}n^h = 0$$

ricordando che, per la formula d' interpolazione di GREGORY-NEWTON, è

$$x^h = \binom{x}{1}\Delta 0^h + \binom{x}{2}\Delta^2 0^h + \dots + \binom{x}{h}\Delta^h 0^h$$

ed osservando che

$$S_h = n(n-1)\dots(n-h+1)(1-1)^{n-h} = \binom{n}{h}1\cdot 2 \dots h -$$

$$-\binom{n}{h+1}2\cdot 3\dots(h+1) + \dots + (-1)^{n-h}\binom{n}{n}(n-h+1)(n-h+2)\dots n = 0.$$

È dunque anche

$$\sigma_h = \binom{n}{1} - \binom{n}{2}\left[\binom{2}{1}\Delta 0^h + \binom{2}{2}\Delta^2 0^h\right] + \binom{n}{3}\left[\binom{3}{1}\Delta 0^h + \binom{3}{2}\Delta^2 0^h + \binom{3}{3}\Delta^3 0^h\right] + \dots$$

$$+ (-1)^{h-1}\binom{n}{h}\left[\binom{h}{1}\Delta 0^h + \binom{h}{2}\Delta^2 0^h + \dots + \binom{h}{h}\Delta^h 0^h\right] =$$

$$= \frac{\Delta 0^h}{1!}s_1 - \frac{\Delta^2 0^h}{2!}s_2 + \dots + (-1)^{h-1}\frac{\Delta^h 0^h}{h!}s_h = 0.$$

Si perviene alla (1) in modo forse più immediato, ma non ele mentare, quando ci si proponga di sviluppare

$$\frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = \int_0^\infty e^{-tx}(e^{-t}-1)^n dt \qquad (Rx > 0)$$

in serie di potenze decrescenti di x [1], o, meno immediatamente, quando si effettui sui due membri di

$$\frac{d}{dx}(1-(1-x)^n = \binom{n}{1} - \binom{n}{2} 2x + \dots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n} nx^{n-1}$$

0, 1,..., h-1 volte l'operazione $x\frac{d}{dx}$, e si ponga $x=1$.

(1) Cfr. U. BROGGI, *Su di qualche applicazione dei numeri di Stirling.* « Rend. Ist. Lombardo », vol. LXVI, pagg. 196-201, 1933.