
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FILIPPO ODONE

Deformazioni finite e deformazioni infinitesime

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 12 (1933), n.4, p. 238–241.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_4_238_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_4_238_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Deformazioni finite e deformazioni infinitesime.

Nota di FILIPPO ODOE (a Torino).

Sunto. - Il prof. BURGATTI ha dimostrato la formula seguente: $1+z=z_0\gamma$, essendo z un'omografia qualunque, γ la dilatazione data da $\gamma^2=1+2Dz+Kz\cdot\alpha$, z_0 l'isomeria data da $z_0=(1+\alpha)^{-1}$.

In questa Nota si dimostra che, quando z sia infinitesima, si ha (a meno di infinitesimi di ordine superiore a quello di α): $\gamma=1+Dz$, $z_0=1+(Vz)\wedge$, ossia $1+z=(1+Vz\wedge)(1+Dz)=(1+Dz)(1+Vz\wedge)$.

Sia z l'omografia di una deformazione generica di un mezzo continuo. Nel volume del prof. BURGATTI, *Teoria matematica dell'elasticità*, è assegnata l'espressione dell'omografia $1+z$ come prodotto di una dilatazione per una isomeria ⁽¹⁾.

In questa breve Nota si cerca la forma che assumono rispettivamente la dilatazione e l'isomeria quando la deformazione è infinitesima.

La questione è abbastanza interessante, perchè conduce a delle formule assai semplici ed espressive, e perchè permette di precisare che mentre un teorema è valido, sia che si tratti di deformazioni finite che di deformazioni infinitesime, l'interpretazione e l'enunciato, che di esso si danno, sono invece veri solo se la deformazione è infinitesima.

Consideriamo un corpo continuo. Sia P la posizione di un punto generico di esso in una data configurazione. A partire da questa configurazione, si imponga al corpo una deformazione definita dallo spostamento s , subito da ogni punto del corpo a partire dalla sua posizione P ; s è una funzione della posizione P .

Si passa così ad una nuova configurazione del sistema, in cui $P_1 = P + s$ è il corrispondente di P .

Consideriamo un piccolo intorno di P : sia $M = P + dP$ il punto generico di questo intorno, e supponiamo di prendere dP tanto piccolo da poter trascurare i termini contenenti infinitesimi di ordine superiore a quello di dP .

Nella deformazione considerata al punto M corrisponderà il punto M_1 dato da

$$\begin{aligned} M_1 &= M + s(M) = M + s(P + dP) = M + s + \frac{ds}{dP} dP = \\ &= P + dP + s + \frac{ds}{dP} dP = P_1 + \left(1 + \frac{ds}{dP}\right) dP. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ P. BURGATTI, *Teoria matematica della elasticità*. Volume III dell'Analisi vettoriale Generale, pag. 52. Bologna, Zanichelli, 1931.

E quindi, ponendo $M_1 - P_1 = dP_1$, $\frac{ds}{dP} = \alpha$, si ha

$$dP_1 = (1 + \alpha)dP,$$

ossia si ottiene l'elemento dP_1 della particella deformata corrispondente all'elemento dP della particella primitiva applicando a dP l'omografia $1 + \alpha$ ⁽¹⁾.

L'omografia $1 + \alpha$, come d'altronde qualunque omografia, è esprimibile come prodotto di una dilatazione per una isomeria.

Precisamente posto

$$1 + \alpha = \alpha_0 \gamma,$$

dove γ è dilatazione ed α_0 isomeria, si ha

$$(1) \quad \begin{cases} \gamma^2 = 1 + 2D\alpha + K\alpha \cdot \alpha \\ \alpha_0 = (1 + \alpha)\gamma^{-1} \quad (2). \end{cases}$$

Nell'ipotesi che s sia infinitesimo, dell'ordine di dP , e che anche α sia infinitesima dello stesso ordine, la deformazione si dice infinitesima ⁽³⁾.

In tal caso è facile provare, che a meno di infinitesimi di ordine superiore, e conservando γ, α_0 il significato precedente, risulta

$$(2) \quad \begin{cases} \gamma = 1 + D\alpha \\ \alpha_0 = 1 + (V\alpha)\wedge. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. — Avendo supposto α infinitesima, si hanno le semplificazioni seguenti. Da $\gamma^2 = 1 + 2D\alpha + K\alpha \cdot \alpha$ si ricava intanto $\gamma^2 = 1 + 2D\alpha$, e di qui, sempre a meno di infinitesimi di ordine superiore, $\gamma = 1 + D\alpha$.

Infatti $(1 + D\alpha)^2 = 1 + 2D\alpha + (D\alpha)^2$, ossia $\gamma^2 = 1 + 2D\alpha$, nell'ordine di approssimazione ammesso: è così provata la prima eguaglianza.

Per provare la seconda, osserviamo che, sempre a meno di infinitesimi di ordine superiore, si ha $\gamma^{-1} = 1 - D\alpha$; infatti $(1 + D\alpha)(1 - D\alpha) = 1 - (D\alpha)^2$, ossia $\gamma \cdot \gamma^{-1} = 1$.

E allora, da $\alpha_0 = (1 + \alpha)\gamma^{-1}$ risulta

$$\alpha_0 = (1 + \alpha)(1 - D\alpha) = 1 + \alpha - D\alpha = 1 + (V\alpha)\wedge,$$

ossia proprio la seconda eguaglianza.

⁽¹⁾ Loc. cit., pag. 52.

⁽²⁾ Loc. cit., pag. 52 e pag. 53.

⁽³⁾ Loc. cit., pag. 61.

Che nell'ordine di approssimazione ammesso, $1 + (V\alpha) \wedge$ sia un'isomeria, risulta dal fatto che essendo α un vettore arbitrario, si ha $[(1 + V\alpha \wedge)\alpha]^2 = \alpha^2 + (V\alpha \wedge \alpha)^2$, ossia, sempre nell'ordine di approssimazione ammesso, $\text{mod } [(1 + V\alpha \wedge)\alpha] = \text{mod } \alpha$. Si potrebbe anche provare che $1 + V\alpha \wedge$ è un'isomeria, in quest'altro modo. $K(1 + V\alpha \wedge) = 1 - V\alpha \wedge$ e quindi, nell'approssimazione ammessa, $(1 + V\alpha \wedge)[K(1 + V\alpha \wedge)] = 1$, che è proprietà caratteristica delle isomerie. È pure facile provare che $I_3(1 + V\alpha \wedge) = 1$; basta ricordare lo sviluppo di $I_3(1 + V\alpha \wedge) = 1 + I_1 V\alpha \wedge + I_2 V\alpha \wedge + I_3 V\alpha \wedge$, che nell'approssimazione ammessa, si riduce ad 1, perchè $I_1 V\alpha \wedge = 0$.

Le relazioni (2) sono così completamente provate.

La relazione

$$1 + z = (1 + V\alpha \wedge)(1 + Dz),$$

valida solo per z infinitesima, prova che, come nel caso delle deformazioni finite, la deformazione della particella si può decomporre in due parti: una parte è la deformazione pura definita da $1 + Dz$; l'altra parte è invece un moto di corpo rigido, consistente in una rotazione attorno ad un asse parallelo a $V\alpha$, e data da

$$1 + V\alpha \wedge = 1 + \frac{1}{2} \text{rot } s \wedge.$$

Quindi mentre la formula ⁽¹⁾

$$M_1 = M + s(P) + \frac{1}{2} \text{rot } s \wedge (M - P) + Dz(M - P)$$

vale qualunque sia la deformazione, sia essa finita oppure infinitesima, l'enunciato che se ne dà e che illustra il significato cinematico di $\text{rot } s$, e cioè che in ogni punto P il vettore $\frac{1}{2} \text{rot } s$ definisce la rotazione del moto rigido della particella ⁽²⁾, vale solo se la deformazione è infinitesima, perchè solo allora, come s'è visto, $1 + V\alpha \wedge$ definisce il moto rigido della particella.

OSSERVAZIONE. — L'omografia α può essere un'omografia qualunque, e le proprietà espresse dalle formule (1) e (2) continuano a valere senza alcuna modificazione; basta infatti osservare che in nessun punto delle dimostrazioni interviene l'ipotesi che debba

essere $\alpha = \frac{ds}{dP}$.

E che sia proprio così, risulta pure dal fatto che, nel caso delle

⁽¹⁾ Loc. cit., pag. 64.

⁽²⁾ Loc. cit., pag. 65.

deformazioni infinitesime, la relazione

$$1 + z = (1 + Vz\wedge)(1 + Dz) = (1 + Dz)(1 + Vz\wedge)$$

equivale, sempre nell'approssimazione ammessa, alla relazione $z = Dz + Vz\wedge$, valida qualunque sia l'omografia z .