
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

SILVIO CINQUINI

Sopra una questione di minimo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 12 (1933), n.4, p. 228–232.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_4_228_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_4_228_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_4_228_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sopra una questione di minimo (*).

Nota di SILVIO CINQUINI (a Pisà).

Sunto. - Nella presente Nota, la quale si propone di luneggiare una delle difficoltà che s'incontrano nel trattare il problema dell'estremo assoluto per gli integrali doppi in forma parametrica, si prova, mediante un esempio, che un recente risultato, ottenuto dal dott. R. P. GILLESPIE, è errato.

1. In un recente articolo ⁽¹⁾ il dott. GILLESPIE si occupa delle condizioni per l'esistenza del minimo dell'integrale doppio

$$I(S) = \iint_S F(x, y, z; A, B, C) du dv,$$

ove S è una superficie definita dalle equazioni

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

ed è

$$A = y_u z_v - z_u y_v, \quad B = z_u x_v - x_u z_v, \quad C = x_u y_v - y_u x_v.$$

Il GILLESPIE considera precisamente il caso in cui la funzione F abbia la seguente forma

$$(1) \quad F = \Phi(x, y, z) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} + f(x, y, z)A + g(x, y, z)B + h(x, y, z)C,$$

e supposte, per $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, verificate le condizioni

$$(2) \quad F > 0, \quad F_1 \geq 0 \quad (2).$$

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

⁽¹⁾ R. P. GILLESPIE. *On double integrals in the calculus of variations.* « Proceedings of the Cambridge Phil. Society », vol. 28 (1932), pp. 442-54.

⁽²⁾ La funzione F_1 (analoga alla F_1 degli integrali curvilinei) è definita da una qualunque delle uguaglianze

$$F_{AA} = (B^2 + C^2)F_1, \quad F_{BB} = (C^2 + A^2)F_1, \text{ ecc.}$$

(l'ultima delle quali è sempre soddisfatta se è $\Phi \geq 0$) afferma che, in ogni classe completa $|S|$ di superficie ad area finita e contenute in un campo limitato, esiste sempre il minimo assoluto per l'integrale $I(S)$. L'importanza del problema di cui si occupa il GILLESPIE è ben nota al lettore (basta por mente al caso particolare $\Phi \equiv 1$, $f \equiv g \equiv h \equiv 0$); senonchè nella sua dimostrazione il GILLESPIE fa uso ⁽¹⁾ di un'illecita estensione alle superficie del noto teorema di HILBERT, relativo ad un insieme di curve aventi tutte lunghezza inferiore ad un numero fisso, inquantochè il GILLESPIE afferma che una successione di superficie continue, tutte contenute in un campo limitato e tutte di area inferiore ad un numero fisso, ammette almeno una superficie di accumulazione. Tale affermazione è errata, come del resto risulterà da ciò che segue.

Ma c'è di più: *non solo la dimostrazione del Gillespie non è soddisfacente, ma anche il risultato a cui giunge tale Autore è errato*, come sarà provato nella presente Nota, la quale si propone di lumeggiare una delle difficoltà che si incontrano nel trattare il problema dell'estremo assoluto per gli integrali doppi in forma parametrica.

2. Nel presente n.º si mostra che *se la funzione F, definita dalla (1), ha la forma seguente*

$$F = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

(e sono quindi verificate le (2)) *si può trovare una classe completa di superficie continue e ad area finita e tutte contenute in un campo limitato, nella quale non esiste il minimo assoluto dell'integrale*

$$(3) \quad I(S) = \iint_S \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \, dudv.$$

Sia Q il quadrato del piano (x, y) di vertici opposti $(0, 0)$, $(1, 1)$ e si indichi con S_n , ($n = 1, 2, \dots$) la superficie formata: 1º) dalle superficie laterali dei $(2^n - 1)^2$ coni circolari poggianti su Q , di altezza 1, raggio di base $r_n = \frac{1}{2\pi n(2^n - 1)^2}$ (che risulta $< \frac{1}{2^{n+1}}$), aventi i centri delle basi nei punti $\left(\frac{p}{2^n}, \frac{q}{2^n}\right)$, (ove $p = 1, 2, \dots, 2^n - 1$; $q = 1, 2, \dots, 2^n - 1$); 2º) dalla parte di Q esterna alle basi dei coni indicati.

(1) Vedi GILLESPIE, loc. cit., n. 8.

L'integrale (3), applicato a S_n , dà per $I(S_n)$ l'area di S_n : ed è

$$\begin{aligned} I(S_n) &= (2^n - 1)^2 \pi r_n \sqrt{1 + r_n^2} + (1 - (2^n - 1)^2 \pi r_n^2) \\ &= 1 + (2^n - 1)^2 \pi r_n \{ \sqrt{1 + r_n^2} - r_n \} > 1. \end{aligned}$$

È inoltre

$$I(S_n) < 1 + (2^n - 1)^2 \pi r_n \sqrt{1 + r_n^2} < 1 + \frac{1}{n}$$

e perciò $I(S_n) \rightarrow 1$, per $n \rightarrow \infty$.

Le superficie S_n (che sono continue e ad area finita, anzi sempre < 2 , e tutte contenute in un campo limitato) non hanno alcuna superficie di accumulazione, perchè tutti i punti del cubo costruito su Q sono punti limiti di punti di S_n ed anche delle superficie di ogni successione estratta da quella delle S_n ; perciò la classe $\{S_n\}$, ($n=1, 2, \dots$) è completa; ma in essa non esiste il minimo di $I(S_n)$.

3. Considerato ora il caso in cui la funzione F abbia la forma generale (1), *supposte verificate le* (2), e indicato con V un campo limitato a tre dimensioni, in cui le funzioni Φ, f, g, h sono definite e continue, si vuol mostrare nel presente n.º che *si può sempre trovare una classe completa di superficie continue e ad area finita, tutte contenute in un campo limitato, e nella quale non esiste il minimo dell'integrale*

$$I(S) = \iint_S F du dv,$$

ogni qualvolta la funzione F soddisfi anche alla seguente condizione: esista almeno un punto (x_0, y_0, z_0) interno a V e una coppia di numeri $\delta_0 > 0$, e $\lambda > 0$, in modo che la disuguaglianza

$$(4) \quad F \geq \lambda \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

sia verificata in ogni punto (x, y, z) , tale che sia

$$|x - x_0| \leq \delta_0, \quad |y - y_0| \leq \delta_0, \quad |z - z_0| \leq \delta_0,$$

e per tutte le terne A, B, C ; intendendosi inoltre che il numero δ_0 sia scelto abbastanza piccolo in modo che tutti i punti, le cui coordinate verificano le ultime disuguaglianze scritte, appartengano a V .

Senza ledere affatto la generalità della questione proposta si potrà sempre supporre che il punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ sia interno a V , e che si abbia inoltre $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = \frac{1}{2}$, $z_0 = 0$, e $\delta_0 = 1$; perchè, in

caso contrario, basta eseguire un opportuno cambiamento di variabili per ridurre a questo caso. La (4) è allora verificata in tutti i punti (x, y, z) tali che (x, y) appartenga al quadrato Q e che sia $|z| \leq 1$, e per tutte le terne A, B, C .

Sia ancora S_n la superficie definita nel n.º 2 e n_0 rappresenti il più piccolo valore di n tale che $r_n < \frac{\lambda}{N(1 + \sqrt{3})}$, dove N indica il massimo modulo delle funzioni Φ, f, g, h nel campo $W = [0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1]$.

Detta S_n' la parte della superficie S_n composta delle superfici laterali dei coni costruiti nel n.º 2, abbiamo, per la (4),

$$I(S_n') \geq \lambda \iint_{S_n'} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv = \lambda(2^n - 1)^2 \pi r_n \sqrt{1 + r_n^2}.$$

Detta poi Σ_0 la superficie coincidente col quadrato Q e $\Sigma_{0,n}$ la parte di essa costituita dai cerchi di raggio r_n costituenti le basi dei coni considerati nel n.º 2, abbiamo, tenendo presente la disuguaglianza $|A| + |B| + |C| \leq \sqrt{3(A^2 + B^2 + C^2)}$, e per ogni $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} I(\Sigma_{0,n}) &\leq N(1 + \sqrt{3}) \iint_{\Sigma_{0,n}} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv = \\ &= N(1 + \sqrt{3})(2^n - 1)^2 \pi r_n^2 < \lambda(2^n - 1)^2 \pi r_n. \end{aligned}$$

Ne segue, per ogni $n \geq n_0$,

$$I(S_n) > I(\Sigma_0).$$

D'altra parte, per la prima delle (2), si ha

$$\begin{aligned} I(S_n) &< I(\Sigma_0) + I(S_n') \leq I(\Sigma_0) + N(1 + \sqrt{3})(2^n - 1)^2 \pi r_n \sqrt{1 + r_n^2} \\ &< I(\Sigma_0) + \frac{N(1 + \sqrt{3})}{n}, \end{aligned}$$

e perciò, per $n \rightarrow \infty$, $I(S_n) \rightarrow I(\Sigma_0)$.

Le superficie S_n , (per $n = n_0, n_0 + 1, \dots$), che sono continue e ad area finita (sempre < 2) e tutte contenute in un campo limitato, non hanno alcuna superficie di accumulazione e costituiscono una classe completa nella quale non esiste il minimo di $I(S_n)$.

In un recentissimo articolo (R. P. GILLESPIE, *The general double integral problem in the calculus of variations*, « Proceedings of the Cambridge Phil. Society », vol. 29 (1933), pp. 207-11), del quale soltanto ora prendo visione, il GILLESPIE riprende lo studio degli integrali doppi in forma parametrica, per trattare il caso generale

in cui la funzione $F(x, y, z; A, B, C)$ abbia una forma qualunque, purchè sia omogenea di primo grado nelle A, B, C .

A tal uopo il GILLESPIE introduce tre funzioni F_1, F_2, F_3 , le quali, come Egli stesso afferma, qualora la funzione F abbia la forma particolare considerata nel primo lavoro, coincidono con la F_1 allora introdotta.

Alla fine (p. 211) di questo secondo lavoro il GILLESPIE afferma che sotto le ipotesi $F > 0, F_1 \geq 0, F_2 \geq 0, F_3 \geq 0$, in ogni classe completa di superfici ad area finita e tutte contenute in un campo limitato esiste un minimo assoluto per l'integrale $\iint_S F du dv$.

Quest'ultima affermazione del GILLESPIE è *a fortiori* errata, perchè essa contiene, come caso particolare, il risultato a cui è giunto il GILLESPIE nel primo lavoro, e tale risultato, per quanto si è visto nella presente Nota, è errato.