Bollettino Unione Matematica Italiana

Mario Villa

Sulle reti omaloidlche di pseudoconiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **12** (1933), n.4, p. 219–222.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_4_219_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1933.

Sulle reti omaloidiche di pseudoconiche.

Nota di MARIO VILLA (a Pavia).

Sunto. - *L'Autore determina una rete omaloidica di pseudoconiche.*

1. In una Nota di prossima pubblicazione nei « Rend. del Seminario Matematico di Padova » ([2]) ho iniziato lo studio delle trasfor-

([2]) Oltre a questa Nota (che s'intitola: *Sulle trasformazioni pseudocremoniane*), per varie nozioni che appariranno in seguito, vedi C. SEGRE: 1) *Un nuovo campo di ricerche geometriche*, « Atti di Torino », vol. 25, 26, 1890-1891; 2) *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici*, « Math. Ann. », vol. 40, 1892.

mazioni *pseudocremoniane*, ossia delle trasformazioni iperalgebriche biunivoche fra due S_r che mutáno enti algebrici in enti iperalgebrici.

Le trasformazioni pseudocremoniane che per prime si presentano si ottengono con costruzioni analoghe a quelle delle ordinarie trasformazioni quadratiche piane.

In luogo delle reti omaloidiche di coniche si hanno allora delle reti omaloidiche di *pseudoconiche* (1), ma qui — variando la costruzione — varia pure la natura della rete, e ciò dipende dal fatto che mentre per una conica i centri dei due fasci proiettivi generatori possono assumersi arbitrariamente su di essa, i centri dei due fasci antiproiettivi generatori di una pseudoconica sono i due punti *singolari* di questa. Oltre alla rete di pseudoconiche ottenuta in quella mia Nota mediante due coppie di fasci di rette di cui l'una riferita proiettivamente e l'altra antiproiettivamente, e che è formata dalle pseudoconiche aventi in comune i due punti singolari e un altro punto (2), ve ne sono dunque altre (3).

Nella Nota presente determinerò la rete relativa alla trasformazione accennata da C. SEGRE (4) la cui costruzione è sostan-

(1) In S_r dirò *pseudoquadrica* (per $r=2$: *pseudoconica*) l'ente generato da due stelle ∞^k ($k=1,\dots, r-1$) antireciproche — in quanto è luogo degli S_{r-k-1} comuni agli S_{r-k} di una stella e agli S_{r-1} omologhi dell'altra. Per $r=2$, quando i due fasci antiproiettivi di rette sono antiprospettivi si ha una particolare pseudoconica: una catena piana.

(2) In particolare: se nella proiettività — o nell'antiproiettività — di cui sopra alla retta dei centri dei fasci di uno dei piani corrisponde la retta dei centri dei fasci dell'altro piano, la rete si compone delle pseudoconiche aventi in comune i due punti singolari e la tangente in uno di questi; se poi il fatto precedente si presenta sia per la proiettività che per l'antiproiettività, la rete si compone delle catene piane rispetto alle quali due dati punti sono armonici.

(3) La costruzione con due coppie di fasci di rette è caso particolare di quella che risulta ponendo fra due piani una reciprocità ω_1 e un'antireciprocità $\overline{\omega}_2$, e chiamando omologhi due punti reciproci in ω_1 e in $\overline{\omega}_2$. L'antiproiettività $\omega=\omega_1 \cdot \overline{\omega}_2$ presenta in generale due casi (cfr. SEGRE, 1, n. 8): od ha per elementi uniti i vertici e i lati di un triangolo e non possiede alcun elemento involutorio, oppure ha solo un punto unito ed una retta unita, ma due punti involutori su questa, congiunti a quello da due rette involutorie. Limitandosi — ad esempio — al primo caso, si conclude: ***Data in un piano una anticollineazione ω dotata di tre punti uniti, le pseudoconiche che hanno i punti singolari in due punti omologhi in ω e che passano per i tre punti uniti di ω formano una rete omaloidica.***

(4) In 1, n. 47. Una trasformazione di questa natura sussiste, più in generale, fra due S_r (Per $r=1$, vedi SEGRE, 1, n. 26).

zialmente l'analoga di quella di STEINER per le trasformazioni quadratiche (1).

2. Si tratta della trasformazione τ che si ottiene fra due piani π, π_0 chiamando omologhi due punti che stanno su una corda di una catena spaziale fissa k — ossia su una retta unita dell'antinvoluzione Ω che ha k per fondamentale (2).

Consideriamo il piano π' omologo di π in Ω, le rette $u \equiv (\pi, \pi')$, $p \equiv (\pi, \pi_0)$, $q \equiv (\pi', \pi_0)$, e la catena rettilinea γ_0 in cui k sega π_0, la retta u_0 a cui appartiene γ_0.

Ciò posto, sia dapprima r una retta di π a cui non appartenga nè (p, u_0), nè un punto della catena rettilinea γ segata da k su u. Allora la pseudoquadrica generata dalle rette comuni ai piani omologhi dei fasci di assi r, r', da Ω riferiti antiproiettivamente, taglia π_0 in una pseudoconica i cui punti singolari sono (r, p), (r', q). Essendo u_0 unita in Ω, due piani omologhi dei fasci r, r' segano u_0 in punti omologhi rispetto ad Ω. Altrettanto quindi avviene delle traccie di quei piani su u_0. D'altra parte l'antinvoluzione subordinata da Ω su u_0 ha la γ_0 per fondamentale, sicchè alla pseudoconica appartengono tutti i punti di γ_0 e inoltre il punto (p, q).

Supponiamo ora che ad r non appartenga (p, u_0) ma appartenga un punto di γ. La r' passerà pure per questo punto di γ. L'omologa di r in τ è quindi la retta $[(r, p), (r', q)]$ la quale — essendo il piano (r, r') unito in Ω — sega la u_0 in un punto di γ_0.

Sia infine r una retta uscente da (p, u_0). Se ad r appartiene un punto di γ, in τ ad r corrisponde u_0. Se poi r non sega u in un punto di γ, e neppure in (p, q), nè nell'omologo di (p, q) in Ω — figurando fra i piani omologhi dei fasci r, r' i piani (r, u_0), (r', u_0) — i fasci generatori dell'ente omologo di r sono antiprospettivi. Ad r corrisponde quindi una catena piana passante per (p, q), e rispetto alla quale (p, u_0), (q, u_0) sono armonici. È da avvertire che non si hanno però tutte le catene piane passanti per (p, q) e rispetto alle quali (p, u_0), (q, u_0) sono armonici, giacchè queste si ottengono fissando una retta t del fascio (p, u_0) e assumendo come omologa di t una retta arbitraria dell'altro fascio. Qui invece — essendo sghembe le rette s', s in cui il piano (r, t), e il suo omologo in Ω, segano π', π — i punti in cui s, s' intersecano p, q non sono allineati con un punto di γ_0.

(1) Vedi ad es. BERTINI, *Complementi di geometria proiettiva*, Bologna, Zanichelli, 1928, p. 187.

(2) Considerando le due rette sghembe che appaiono nella costruzione di STEINER come rette fondamentali di un'involuzione, l'analogia di cui si diceva è palese.

In definitiva, la rete omaloidica di pseudoconiche generata da τ si ottiene nel modo che segue.

Date in un piano tre rette p, q, u_0, *e su una di queste — la* u_0 — *una catena rettilinea* γ_0 *rispetto alla quale* (p, u_0), (q, u_0) *sono armonici, la rete è formata:*

1) *Dalle pseudoconiche aventi i punti singolari in due punti arbitrari di* p, q — *purchè non allineati con un punto di* γ_0, *nè appartenenti a* u_0, *nè entrambi in* (p, q) — *passanti per i punti di* γ_0, *e quindi per* (p, q).

2) *Dalle catene piane passanti per* (p, q) *e rispetto alle quali* (p, u_0), (q, u_0) *sono armonici, e non passanti per i punti in cui una retta arbitrariamente fissata* t *uscente da* (p, u_0) *è segata dalla catena semplice di rette che si ottiene proiettando la* γ_0 *da* (q, t) *su* p, *e poi proiettando tale catena di* p *da* (q, u_0).

3) *Dalle rette* p, q, u_0 *e da ogni retta del piano a cui appartenga un punto di* γ_0.