
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

JUAN CARLOS VIGNAUX

Sul metodo di sommazione di Abel-Poisson per le serie doppie

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 12 (1933), n.4, p. 213-219.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_4_213_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_4_213_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1933.

Sul metodo di sommazione di Abel-Poisson per le serie doppie.

Nota di J. C. VIGNAUX (a Buenos Aires).

1. Il classico metodo di sommazione delle serie di CESÀRO, è stato esteso alle serie doppie ed alle triple rispettivamente da C. N. MOORE ⁽¹⁾ e da M. EVERSUEL ⁽²⁾.

In questa Nota, ci proponiamo di definire e studiare un metodo di sommazione per le serie doppie divergenti analogo al metodo di ABEL-POISSON delle serie semplici ⁽³⁾.

Diremo col PRINGSHEIM ⁽⁴⁾ che la serie doppia

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n},$$

è convergente, divergente od oscillante, secondo che il doppio limite di

$$S_{m,n} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n u_{ij},$$

⁽¹⁾ C. N. MOORE, *Sur les facteurs de convergence dans les séries doubles et sur la série double de Fourier*. « C. R. », 155 (1912).

⁽²⁾ M. B. EVERSUEL. *On Convergence Factor in Triple Series*. « Annals of Math. », 24 (1922-23), pp. 141-166.

⁽³⁾ O. PERRON, « Mathematischen Zeitschrift », 1920, p. 286; N. GROSZ, *Zur Poissonschen Summierung*. « Sitzungsberichte der Ak. d. Wiss. Wien », 124 (1915), pp. 1017-37.

⁽⁴⁾ PRINGSHEIM, « Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften », vol. I, A. 3, pp. 97-98.

sia rispettivamente finito, infinito o indeterminato. Nel primo caso il numero

$$S = \lim_{m, n \rightarrow \infty} S_{m, n},$$

si chiama la somma della serie doppia data.

Generalizzeremo questa nozione di « somma » nella seguente forma. Data la serie doppia (1) convergente o no, consideriamo la serie doppia di potenze delle variabili reali x ed y

$$\sigma(x, y) = \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} u_{m, n} x^m y^n$$

che soddisfi alle due condizioni:

1°) la serie $\sigma(x, y)$ è convergente nel dominio

$$||x| < 1, |y| < 1|,$$

2°) esiste una costante positiva M tale che

$$|S_{m, n}| < M$$

per ogni intero positivo m ed n .

Se esiste ed è finito il doppio limite di $\sigma(x, y)$ quando x ed y tendono ad 1, simultaneamente ed indipendentemente

$$\lim_{(x, y) \rightarrow 1} \sigma(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow 1} \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} u_{m, n} x^m y^n = S$$

diremo che la serie doppia (1) è sommabile col metodo di Abel, o pure semplicemente, sommabile (A) con somma uguale ad S .

2. Questa definizione generalizzata di somma soddisfa alla condizione di permanenza.

Se la serie doppia

$$(1) \quad \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} u_{m, n},$$

è convergente con somma S ed $|S_{m, n}| < M$ per ogni m e n , onde M è una costante positiva, la serie doppia (1) è pure sommabile (A) con uguale somma S .

In effetto, già che

$$u_{ij} = S_{ij} - S_{i-1, j} - S_{i, j-1} + S_{i-1, j-1},$$

risulta secondo la ipotesi $|S_{m, n}| < M$,

$$|u_{ij}| < 4M$$

pertanto, la serie doppia di potenze

$$(2) \quad \sigma(x, y) = \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} u_{m,n} x^m y^n$$

è assolutamente convergente nel campo $|x| < 1, |y| < 1$.

Moltiplicando la serie (2) colla serie geometrica convergente

$$(3) \quad \frac{1}{(1-x)(1-y)} = \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} x^m y^n \quad (|x| < 1, |y| < 1)$$

dalla regola di CAUCHY, risulta

$$\sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} x^m y^n \cdot \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} u_{m,n} x^m y^n = \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} S_{m,n} x^m y^n,$$

serie convergente in tutto il dominio $|x| < 1, |y| < 1$.

Secondo la (2) e la (3) quest'ultima uguaglianza può scriversi

$$(4) \quad \sigma(x, y) = (1-x)(1-y) \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} S_{m,n} x^m y^n.$$

Inoltre, è per ipotesi

$$S = \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} u_{m,n}$$

e dalla (2) si ha

$$1 = (1-x)(1-y) \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} x^m y^n$$

cioè

$$(5) \quad S = (1-x)(1-y) \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} S x^m y^n.$$

Restando la (5) da (4) risulta

$$(6) \quad S - \sigma(x, y) = (1-x)(1-y) \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} (S - S_{m,n}) x^m y^n.$$

Dalla convergenza della serie (1) risulta che essendo un $\varepsilon > 0$ arbitrario, esistono due numeri interi p e q tali che

$$|S - S_{m,n}| < \varepsilon \quad \text{per ogni } m \geq p, n \geq q.$$

Prendendo il valore assoluto dalla (6), si ha

$$\begin{aligned} |S - \sigma(x, y)| &< (1-x)(1-y) \sum_0^p \sum_0^q |R_{m,n}| x^m y^n + \\ &+ (1-x)(1-y) \sum_{p+1}^{\infty} \sum_{q+1}^{\infty} |R_{m,n}| x^m y^n + (1-x)(1-y) \sum_{m=0}^p \sum_{n=q+1}^{\infty} |R_{m,n}| x^m y^n + \\ &+ (1-x)(1-y) \sum_{n=0}^q \sum_{m=p+1}^{\infty} |R_{m,n}| x^m y^n, \end{aligned}$$

onde

$$R_{m,n} = S - S_{m,n}.$$

Ma

$$(1-x)(1-y) \sum_0^p \sum_0^q |R_{m,n}| x^m y^n < (1-x)(1-y)A$$

dove

$$A = \sum_0^p \sum_0^q |R_{m,n}|,$$

ed

$$(1-x)(1-y) \sum_{p+1}^{\infty} \sum_{q+1}^{\infty} |R_{m,n}| x^m y^n < (1-x)(1-y)\varepsilon \cdot \sum_{p+1}^{\infty} \sum_{q+1}^{\infty} x^m y^n < \varepsilon.$$

Dalla condizione $|S_{m,n}| < M$ risulta $|S| < M$, dunque

$$|R_{m,n}| < 2M$$

poi

$$\begin{aligned} (1-x)(1-y) \sum_{m=0}^p \sum_{n=q+1}^{\infty} |R_{m,n}| x^m y^n < \\ < (1-x)(1-y)2M \frac{1}{1-y} \sum_{m=0}^p x^m < (1-x)2M \cdot P. \end{aligned}$$

Nello stesso modo

$$(1-x)(1-y) \sum_{n=0}^q \sum_{m=p+1}^{\infty} |R_{m,n}| x^m y^n < (1-y)2M \cdot Q.$$

Secondo tutto questo, la disuguaglianza (7) si può scrivere

$$|S - \sigma(x, y)| < (1-x)(1-y)A + (1-x)2MP + (1-y)2MQ + \varepsilon.$$

Fissati i numeri ε , A , P e Q , si può determinare due numeri positivi δ ed μ , tali che

$$(1-x)(1-y)A + (1-x)2MP + (1-y)2MQ < \varepsilon$$

per ogni

$$1-x < \delta, \quad 1-y < \mu;$$

pertanto, risulta

$$|S - \sigma(x, y)| < 2\varepsilon$$

per tutto

$$1-\delta < x < 1, \quad 1-\mu < y < 1$$

poi

$$\lim_{(x,y) \rightarrow 1} \sigma(x, y) = S.$$

La reciproca non si compie necessariamente. Sia la serie doppia

$$\sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} (-1)^{m+n}$$

si ha

$$\sigma(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m x^m (-1)^n y^n = \frac{1}{(1+x)(1+y)}$$

per ogni sistema $|x| < 1, |y| < 1$. Da qui

$$\lim_{(x, y) \rightarrow 1} \sigma(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow 1} \frac{1}{(1+x)(1+y)} = \frac{1}{4}.$$

Questo metodo di sommazione (come tutti quelli proposti per le serie semplici) è applicabile soltanto alle serie oscillanti, in virtù del teorema:

Se la serie doppia (1) è divergente, cioè

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} S_{m, n} = \pm \infty$$

essa non è sommabile col metodo di Abel.

La dimostrazione non presenta difficoltà.

3. Sussistono in questo metodo di sommazione tutte le proprietà fondamentali delle serie doppie convergenti.

1°) *Se la serie doppia*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{m, n}$$

è sommabile (A) con somma u, la serie doppia

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k u_{m, n} \quad (k \neq 0)$$

è pure sommabile (A) con somma ku.

2°) *Se le due serie doppie*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{m, n} \quad \text{e} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{m, n}$$

sono sommabili (A) con somma u e v rispettivamente, la serie doppia

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (u_{m, n} \pm v_{m, n}),$$

è pure sommabile (A) con somma $u \pm v$.

3°) *Se la serie doppia*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{m, n},$$

è sommabile (A) con somma S, essa è sommabile (A) per linee e per colonne con stesso valore.

La dimostrazione di queste proposizioni non presenta difficoltà.

4. Date le due serie doppie

$$(1) \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} u_{m,n} \quad (2) \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} v_{m,n}$$

si chiama prodotto, la serie doppia

$$\sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} w_{m,n}$$

dove

$$\begin{aligned} w_{m,n} = & u_{0,0} v_{m,n} + \dots + u_{0,n} v_{m,0} + \\ & + u_{1,0} v_{m-1,n} + \dots + u_{1,n} v_{m-1,0} + \\ & + \dots \dots \dots + \dots + \dots \dots \dots \\ & + u_{m,0} v_{0,n} + \dots + u_{m,n} v_{0,0} \end{aligned}$$

definizione questa analoga a quella del CAUCHY per le serie semplici ⁽¹⁾.

TEOREMA. — Se le due serie (1) e (2) sono sommabili (A) con somme u e v rispettivamente, la serie doppia prodotto (3) è pure sommabile (A) con somma $w = uv$.

In effetto, se mettiamo

$$U_{m,n} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n u_{ij}, \quad V_{m,n} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n v_{ij}$$

risulta dalla sommabilità (A) delle serie proposte, la esistenza di due costanti M ed N positive tali che

$$|U_{m,n}| < M, \quad |V_{m,n}| < N \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Siccome è

$$u_{ij} = U_{ij} - U_{i-1,j} - U_{i,j-1} + U_{i-1,j-1}$$

ed

$$v_{ij} = V_{ij} - V_{i-1,j} - V_{i,j-1} + V_{i-1,j-1}$$

si ha

$$|u_{ij}| < 4M, \quad |v_{ij}| < 4N$$

dunque, le serie doppie di potenze

$$(4) \quad u(x, y) = \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} u_{m,n} x^m y^n, \quad (5) \quad v(x, y) = \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} v_{m,n} x^m y^n$$

sono assolutamente convergenti in $\{|x| < 1, |y| < 1\}$.

Effettuando il prodotto colla regola precedente delle due serie

⁽¹⁾ Teoremi analoghi a quelli di CAUCHY, MERTENS, ABEL e HARDY sussistono anche per le serie doppie convergenti.

doppie (4) e (5), si ottiene una serie doppia assolutamente convergente

$$(6) \quad \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} u_{m,n} x^m y^n \cdot \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} v_{m,n} x^m y^n = \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} w_{m,n} x^m y^n$$

in $|x| < 1$, $|y| < 1$.

Da ciò risulta che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow 1} u(x,y) \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow 1} v(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow 1} \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} w_{m,n} x^m y^n$$

e dalle ipotesi

$$u \cdot v = \lim_{(x,y) \rightarrow 1} \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} w_{m,n} x^m y^n$$

il che ci mostra che la serie prodotto (3) è sommabile (A), con somma uv .

Questo teorema è analogo a quello di G. SANNIA ⁽¹⁾ relativo al prodotto di serie semplici sommabili col metodo di ABEL.

5. Nel caso delle serie semplici, un teorema di BROMWICH afferma che ogni serie sommabile col procedimento di CESÀRO (C, δ) è anche sommabile con quello di ABEL. È molto probabile che ci sia un teorema analogo per le serie doppie sommabili col metodo (C, δ, δ') e le serie doppie sommabili col metodo che studiamo.

Le applicazioni di questo metodo alle serie doppie di DIRICHLET ed alle serie di FOURIER saranno motivo di un'altra Nota.

Di uno studio simile dei metodi di BOREL, LE-ROY, DE LA VALLÉE-POUSSIN, RIEMANN ed altri, per le serie doppie, ci occuperemo in un altro luogo.

(1) G. SANNIA, *Il metodo di sommazione di Euler e la moltiplicazione delle serie*. « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei », 2, 1918, pp. 391-99.