
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

TOMMASO BOGGIO

Sopra alcune formule relative alle linee e ipersuperficie coordinate di una varietà riemanniana

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 12 (1933), n.4, p. 208-213.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_4_208_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_4_208_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sopra alcune formule relative alle linee e ipersuperficie coordinate di una varietà riemanniana.

Nota di TOMMASO BOGGIO (a Torino).

Sunto. - Vengono stabilite alcune relazioni fra i vettori tangenti alle linee coordinate di una varietà riemanniana, con n dimensioni, e i vettori normali alle ipersuperficie coordinate della varietà stessa.

Una varietà riemanniana V_n , con n dimensioni, può considerarsi come il luogo di un punto Q funzione di n parametri indipendenti $q_1, q_2, \dots, q_n$.

Si chiamano *linee coordinate* di tale varietà quelle lungo le quali varia soltanto la q_1 , oppure la $q_2, \dots$ oppure la q_n . Si chiamano poi *ipersuperficie coordinate* della V_n le ipersuperficie rappresentate dall'equazione $q_1 = \text{cost.}$, oppure $q_2 = \text{cost.}$, oppure $q_n = \text{cost.}$

I vettori $\partial Q / \partial q_1, \partial Q / \partial q_2, \dots, \partial Q / \partial q_n$ sono tangenti alle varie linee coordinate nel punto Q , e li supporremo linearmente indipendenti; e così i vettori $\text{grad}_v q_1, \text{grad}_v q_2, \dots, \text{grad}_v q_n$ sono normali in Q , alle singole ipersuperficie coordinate.

Fra gli uni e gli altri vettori intercedono varie relazioni, alcune delle quali sono già menzionate nell'opera: BURGATTI, BOGGIO, BURALI-FORTI, *Geometria differenziale* (Zanichelli, Bologna, 1930), che nel seguito indicherò con *Geom. diff.*; ma esse sono tuttora poco note, anzi in un lavoro recentissimo ⁽¹⁾ esse vengono date come formule nuove, e ottenute con calcoli lunghi e complicati, mentre nel volume citato sono stabilite in modo rapidissimo.

A tali formule qui ne aggiungo qualche altra, pure ottenuta in modo molto semplice; tali formule sono legate da una *legge di*

⁽¹⁾ GUGINO, *Sul parallelismo definito con variazioni angolari*. (« Atti R. Istituto Veneto », tomo XCII, 1933).

dualità, la quale permette di ricavare da una di esse un'altra, con opportuni scambi di vettori e di altri elementi che in esse figurano.

1. Sia V_n una varietà riemanniana, con n dimensioni, che possiamo considerare come luogo del punto $Q(q_1, q_2, \dots, q_n)$.

Per l'elemento d'arco ds si ha:

$$ds^2 = dQ^2 = \sum_{i,k}^n Q'_i \times Q'_k dq_i dq_k,$$

ove si è posto, per brevità di scrittura, $Q'_i = \partial Q / \partial q_i$; se poi si pone (*Geom. diff.*, pag. 279):

$$(1) \quad a_{ik} = Q'_i \times Q'_k,$$

risulta

$$ds^2 = \sum_{i,k} a_{ik} dq_i dq_k,$$

che è la forma quadratica fondamentale considerata nelle trattazioni ordinarie della Geometria differenziale, mediante i metodi del Calcolo differenziale assoluto.

Colla trattazione vettoriale (*Geom. diff.*) tale forma quadratica (e il relativo corteo di componenti covarianti, contravarianti, derivate covarianti, contravarianti, ecc.) è *del tutto inutile*.

Qualcuno parla anche di *vettori covarianti e contravarianti* (1); tale denominazione è evidentemente errata, perchè un vettore è ente assoluto, indipendente da coordinate, e perciò non ha senso dire che un vettore è covariante, o contravariante: si deve invece parlare di *componenti covarianti o contravarianti*.

Ciò premesso, se si ricorda che, dato un vettore tangenziale u , le sue componenti covarianti sono date da (*Geom. diff.*, pag. 284)

$$u_k = u \times Q'_k. \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

concludiamo, dalle (1), che le quantità $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ sono le componenti covarianti del vettore Q'_i , il quale ha per modulo, in virtù delle (1), $\sqrt{a_{ii}}$, ed è diretto secondo la tangente alla linea coordinata q_i (lungo la quale varia *solo* la q_i) passante per il punto Q , nel verso delle q_i crescenti.

L'elemento d'arco di tale linea coordinata è ovviamente $ds_i = \sqrt{a_{ii}} dq_i$.

(1) Cfr. ad es. FANO, *Spazi di Riemann, ecc.* (Conferenze di Fisica e di Matematica; R. Università di Torino, 1933-XI). In questo lavoro è anche scritto (pag. 36) che « i vettori $\text{grad}_v q_i$, e $\partial Q / \partial q_i$ sono entrambi unitari », il che è errato, e che « coincidono in coordinate ortogonali », e anche questo non è vero.

2. Possiamo riguardare evidentemente le $q_1, q_2, \dots, q_n$ come funzioni del punto Q , ed è facile vedere che il vettore Q_i' può esprimersi mediante i gradienti superficiali delle q_i colla formula:

$$(2) \quad Q_i' = a_{i1} \text{grad}_v q_1 + a_{i2} \text{grad}_v q_2 + \dots + a_{in} \text{grad}_v q_n.$$

Infatti, moltiplicando scalarmente la (2) per Q_k' , ricordando le (1) e la definizione di gradiente superficiale, in base alla quale si ha $\text{grad}_v q_r \times Q_k' = \partial q_r / \partial q_k$, che vale 0 se $r \neq k$ e vale 1 se $r = k$, si ottiene senz'altro la identità $a_{ik} = a_{ik}$.

Dalle (2) è facile ricavare:

$$(3) \quad \text{grad}_v q_i = a^{i1} Q_1' + a^{i2} Q_2' + \dots + a^{in} Q_n',$$

ove a^{ik} vale il complemento algebrico A_{ik} dell'elemento a_{ik} nel determinante (simmetrico)

$$(4) \quad a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

diviso poi per a , cioè $a^{ik} = A_{ik}/a$.

Infatti, moltiplicando la (2) per a^{ki} e sommando rispetto ad i , avremo, per le proprietà fondamentali dei determinanti:

$$a^{k1} Q_1' + a^{k2} Q_2' + \dots + a^{kn} Q_n' = \text{grad}_v q_k,$$

che è la (3).

Dalla (3), moltiplicando scalarmente per $\text{grad}_v q_k$, risulta (*Geom. diff.*, pag. 280):

$$(5) \quad a^{ik} = \text{grad}_v q_i \times \text{grad}_v q_k.$$

Se ora ricordiamo che le componenti contravarianti del vettore tangenziale u sono date da (*Geom. diff.*, pag. 284):

$$u^k = u \times \text{grad}_v q_k, \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

concludiamo, dalle (4), che le quantità $a^{i1}, a^{i2}, \dots, a^{in}$ sono le componenti contravarianti del vettore $\text{grad}_v q_i$, il quale ha per modulo, in virtù delle (5), $\sqrt{a^{ii}}$, ed è diretto secondo la normale all'ipersuperficie coordinata $q_i = \text{cost.}$, passante per Q , nel verso delle q_i crescenti ⁽¹⁾.

3. Si possono anche ottenere le (3) nel modo seguente.

(1) I vettori che il GUGINO indica con $T^{(i)}$ ed $N^{(i)}$ non sono altro che i nostri Q_i' e $\text{grad}_v q_i$.

Intanto, è facile vedere che si ha:

$$(6) \quad a \cdot \text{grad}_v q_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ Q_1' & Q_2' & \dots & Q_n' \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Infatti, moltiplicando scalarmente la (6) per Q_k' , si ha:

$$a \frac{\partial q_i}{\partial q_k} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

ora, queste n relazioni sono vere, perchè per $k \neq i$ i due membri sono entrambi nulli, e per $k=i$ sono entrambi eguali ad a . Di qui risulta la (6).

Ciò posto, sviluppando il determinante (6) risulta:

$$a \cdot \text{grad}_v q_i = A_{i1} Q_1' + A_{i2} Q_2' + \dots + A_{in} Q_n',$$

che non differisce dalla (3).

4. Se si indica con $\text{am}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ l'*amplitudine* della successione $a_1, a_2, \dots, a_n$ di vettori, cioè il volume (con segno) del parallelepipedo con n dimensioni, determinato dai vettori stessi (supposti uscenti da uno stesso punto), sussiste la formula ⁽¹⁾

$$(7) \quad \text{am}(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot \text{am}(b_1, b_2, \dots, b_n) = \begin{vmatrix} a_1 \times b_1 & a_1 \times b_2 & \dots & a_1 \times b_n \\ a_2 \times b_1 & a_2 \times b_2 & \dots & a_2 \times b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n \times b_1 & a_n \times b_2 & \dots & a_n \times b_n \end{vmatrix}.$$

⁽¹⁾ BOGGIO, *Formule di calcolo vettoriale negli iperspazi e applicazioni*. (« Atti R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. LXVI, 1931).

Di qui, e dalle (1), (4) si conclude senz'altro:

$$(8) \quad [\text{am}(Q_1', Q_2', \dots, Q_n')]^2 = a,$$

perciò se i vettori $Q_1', Q_2', \dots, Q_n'$ sono linearmente indipendenti, si ha $a \neq 0$, e viceversa.

Dalla (7) segue pure subito:

$$(9) \quad \text{am}(Q_1', Q_2', \dots, Q_n') \cdot \text{am}(\text{grad}_v q_1, \text{grad}_v q_2, \dots, \text{grad}_v q_n) = 1,$$

ed anche, tenendo conto delle (5):

$$(10) \quad \begin{vmatrix} a^{11} & a^{12} & \dots & a^{1n} \\ a^{21} & a^{22} & \dots & a^{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n1} & a^{n2} & \dots & a^{nn} \end{vmatrix} = [\text{am}(\text{grad}_v q_1, \text{grad}_v q_2, \dots, \text{grad}_v q_n)]^2.$$

Dalle (9), (8) risulta anche:

$$(8') \quad [\text{am}(\text{grad}_v q_1, \text{grad}_v q_2, \dots, \text{grad}_v q_n)]^2 = 1/a.$$

5. È facile esprimere i vettori $\text{grad}_v q_i$ mediante prodotti esterni di vettori Q_k' . Precisamente, sussiste la relazione:

$$(11) \quad \text{grad}_v q_i = \frac{(-1)^{i-1} E(Q_1', \dots, Q'_{i-1}, Q'_{i+1}, \dots, Q_n')}{\text{am}(Q_1', Q_2', \dots, Q_n')}.$$

Infatti, moltiplicando scalarmente la (11) per Q_k' , si ha:

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_k} = \frac{\text{am}(Q_1', \dots, Q'_{i-1}, Q_k', Q'_{i+1}, \dots, Q_n')}{\text{am}(Q_1', Q_2', \dots, Q_n')}, \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

e queste n relazioni sono vere, perchè se $k \neq i$ ambo i membri sono nulli, e se $k = i$ valgono entrambi 1.

Dalle (11), (3) e (8) risulta:

$$(12) \quad (-1)^{i-1} E(Q_1', \dots, Q'_{i-1}, Q'_{i+1}, \dots, Q_n') = (a^{i1} Q_1' + \dots + a^{in} Q_n') \sqrt{a},$$

la quale esprime il prodotto esterno che figura nel primo membro, mediante vettori tangenti alle linee coordinate.

È pure facile, inversamente, esprimere i vettori Q_i' mediante prodotti esterni di vettori $\text{grad}_v q_k$. Si ha, al riguardo, la formula:

$$(13) \quad Q_i' = \frac{(-1)^{i-1} E(\text{grad}_v q_1, \dots, \text{grad}_v q_{i-1}, \text{grad}_v q_{i+1}, \dots, \text{grad}_v q_n)}{\text{am}(\text{grad}_v q_1, \text{grad}_v q_2, \dots, \text{grad}_v q_n)}.$$

Infatti, moltiplicando scalarmente la (13) per $\text{grad}_v q_k$, si ha:

$$\frac{\partial q_k}{\partial q_i} = \frac{\text{am}(\text{grad}_v q_1, \dots, \text{grad}_v q_{i-1}, \text{grad}_v q_k, \text{grad}_v q_{i+1}, \dots, \text{grad}_v q_n)}{\text{am}(\text{grad}_v q_1, \text{grad}_v q_2, \dots, \text{grad}_v q_n)},$$

e queste relazioni, ove $k=1, 2, \dots, n$, sono vere, perchè se $k \neq i$ ambo i membri sono nulli, e se $k=i$ essi valgono entrambi 1.

Dalle (13), (2) e (8') risulta:

$$(14) \quad (-1)^{i-1} E(\text{grad}_v q_1, \dots, \text{grad}_v q_{i-1}, \text{grad}_v q_{i+1}, \dots, \text{grad}_v q_n) = \\ = (a_{i1} \text{grad}_v q_1 + \dots + a_{in} \text{grad}_v q_n) / \sqrt{a},$$

che esprime il prodotto esterno che figura nel primo membro, mediante vettori normali alle ipersuperficie coordinate.

È interessante osservare che le coppie di formule (1)-(5), (2)-(3), (4)-(10), (8)-(8'), (11)-(13), (12)-(14), possono dirsi fra loro *duali*, perchè si passa da una formula alla sua duale collo scambio di Q_i' con $\text{grad}_v q_i$, di a_{ik} con a^{ik} e di a con $1/a$.

La (9) poi risulta duale di se stessa.