
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ANGELO TONOLO

Espressione analitica dell'integrale del sistema differenziale relativo alle vibrazioni delle membrane elastiche

* Estratto di una lettera di Angelo Tonolo al prof. Antonio Signorini

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 12 (1933), n.4, p. 203–208.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_4_203_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_4_203_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1933.

Espressione analitica dell'integrale del sistema differenziale relativo alle vibrazioni delle membrane elastiche.

(Estratto di una lettera di ANGELO TONOLO
al prof. ANTONIO SIGNORINI).

..... Consideriamo il sistema differenziale

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - b^2 \Delta_2 \xi - (b^2 - a^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) = X \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - b^2 \Delta_2 \eta + (b^2 - a^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) = Y \end{cases}$$

$$(2) \quad \frac{\partial \xi}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \xi = Z,$$

dove il Δ_2 si riferisce alle variabili spaziali x, y, z e X, Y, Z sono funzioni regolari di x, y, z , per ogni istante di tempo t in uno spazio finito o infinito R . Essendo t_0 un istante iniziale fissato, tu hai assegnato l'espressione analitica dell'integrale del sistema (1), (2) in funzione dei valori che nell'istante t_0 assumono in R le funzioni incognite ξ, η, ζ e le loro derivate prime rispetto al tempo. Scrivo qui le tue formule con qualche lieve cambiamento di scrittura.

Sia $P_1(x_1, y_1, z_1)$ un punto fisso di R , $P(x, y, z)$ un punto variabile in R , e $t_1 \geq t_0$ un qualsiasi istante di tempo. Indichiamo con $\sigma_{t_1-t_0}^{(1)}$ la sfera di equazione

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = b^2(t_1 - t_0)^2,$$

con $\sigma_{t_1-t_0}^{(2)}$ l'ellissoide di equazione

$$\frac{(x - x_1)^2}{a^2(t_1 - t_0)^2} + \frac{(y - y_1)^2}{a^2(t_1 - t_0)^2} + \frac{(z - z_1)^2}{b^2(t_1 - t_0)^2} = 1,$$

con $S_{t_1-t_0}$ lo spazio compreso fra queste due superficie, e infine con $\bar{\sigma}_{t_1-t_0}^{(2)}$ la sfera corrispondente all'ellissoide $\sigma_{t_1-t_0}^{(2)}$ nell'affinità

$x = \frac{a}{b} \bar{x}$, $y = \frac{a}{b} \bar{y}$, $z = \bar{z}$. Siano, ancora φ e ψ due generiche funzioni di x, y, z, t , e poniamo:

$$r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}, \quad \sin \omega = \frac{y-y_1}{r}, \quad \cos \omega = \frac{x-x_1}{r},$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \omega_x[\varphi, \psi]_{t_0} = & \frac{1}{4\pi b^2(t_1-t_0)} \int_{\sigma_{t_1-t_0}^{(2)}} \left\{ \varphi \sin \omega - \psi \cos \omega \right\}_{t_0} \sin \omega d\sigma_{t_1-t_0}^{(2)} + \\ & + \frac{1}{4\pi b^2(t_1-t_0)} \int_{\sigma_{t_1-t_0}^{(1)}} \left\{ \varphi \cos \omega + \psi \sin \omega \right\}_{t_0} \cos \omega d\sigma_{t_1-t_0}^{(1)} \mp \\ & \mp \frac{1}{4\pi b} \int_{S_{t_1-t_0}} \left\{ \varphi \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \psi \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} \right\}_{t_0} dS_{t_1-t_0}. \end{aligned}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} \omega_y[\varphi, \psi]_{t_0} = & \frac{1}{4\pi b^2(t_1-t_0)} \int_{\sigma_{t_1-t_0}^{(2)}} \left\{ \psi \cos \omega - \varphi \sin \omega \right\}_{t_0} \cos \omega d\sigma_{t_1-t_0}^{(2)} + \\ & + \frac{1}{4\pi b^2(t_1-t_0)} \int_{\sigma_{t_1-t_0}^{(1)}} \left\{ \varphi \cos \omega + \psi \sin \omega \right\}_{t_0} \sin \omega d\sigma_{t_1-t_0}^{(1)} \mp \\ & \mp \frac{1}{4\pi b} \int_{S_{t_1-t_0}} \left\{ \varphi \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} + \psi \frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2} \right\}_{t_0} dS_{t_1-t_0}, \end{aligned}$$

$$(5) \quad \omega_z[\varphi]_{t_0} = \frac{1}{4\pi a^2(t_1-t_0)} \int_{\sigma_{t_1-t_0}^{(1)}} \varphi_{t_0} d\sigma_{t_1-t_0}^{(1)}.$$

In queste formule vale il segno $+$, o il segno $-$ secondo che si ha $a > b$, oppure $a < b$, e, nel caso di R finito, t_1 deve essere tale per cui le superficie $\sigma_{t_1-t_0}^{(1)}$, $\sigma_{t_1-t_0}^{(2)}$ relative al punto P_1 risultano interne ad R .

Siano ora ξ, η, ζ tre funzioni regolari nello spazio R per ogni $t \geq t_0$ che soddisfano al sistema (1), (2) e si abbia inoltre

$$(6) \quad (\xi)_{t=t_0} = \xi_0(x, y, z), \quad (\eta)_{t=t_0} = \eta_0(x, y, z), \quad (\zeta)_{t=t_0} = \zeta_0(x, y, z),$$

$$(7) \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{t=t_0} = \Xi_0(x, y, z), \quad \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{t=t_0} = H_0(x, y, z), \quad \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)_{t=t_0} = Z_0(x, y, z).$$

Come formule di rappresentazione degli integrali ξ, η, ζ tu hai

dato le seguenti :

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi(P_1, t_1) &= \omega_x[\Xi_0, H_0]_{t_0} + \frac{\partial}{\partial t_1} \omega_x[\xi_0, \eta_0]_{t_0} + \int_{t_0}^{t_1} \omega_x[X, Y]_t dt \\ \eta(P_1, t_1) &= \omega_y[\Xi_0, H_0]_{t_0} + \frac{\partial}{\partial t_1} \omega_y[\xi_0, \eta_0]_{t_0} + \int_{t_0}^{t_1} \omega_y[X, Y]_t dt, \end{aligned} \right.$$

$$(9) \quad \zeta(P_1, t_1) = \omega_z[Z_0]_{t_0} + \frac{\partial}{\partial t_1} \omega_z[\zeta_0]_{t_0} + \int_{t_0}^{t_1} \omega_z[Z]_t dt.$$

Ciò posto, consideriamo il sistema differenziale che regola le vibrazioni delle membrane elastiche,

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \xi - (b^2 - a^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) &= X \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \eta - (b^2 - a^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) &= Y \end{aligned} \right.$$

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \zeta = Z,$$

dove ora il Δ_2 si riferisce alle due variabili x, y e X, Y, Z sono funzioni regolari di x, y, t , e cerchiamo l'espressione analitica dell'integrale del sistema (10), (11) supponendo di conoscere i valori che nell'istante t_0 assumono le funzioni ξ, η, ζ e le loro derivate prime rispetto al tempo. Io raggiungo questo scopo, facendo vedere che nelle ipotesi fatte le integrazioni contenute nei secondi membri delle tue formule (8), (9) si possono ridurre a due dimensioni, ove non figura affatto la coordinata z_1 .

Questo modo di vedere le cose non è che una estensione ai sistemi del metodo « de descente » di HADAMARD, e da lui applicato, ad esempio, per risolvere il problema di CAUCHY relativo all'equazione delle onde cilindriche, supponendo di conoscere la soluzione dello stesso problema per l'equazione delle onde sferiche.

Prendiamo in esame la formula (3) che da $\omega_x[\varphi, \psi]_{t_0}$, e si supponga che le funzioni φ, ψ siano indipendenti da z .

Nell'affinità $x = \frac{a}{b} \bar{x}, y = \frac{a}{b} \bar{y}, z = \bar{z}$ l'ellissoide

$$\frac{(x - x_1)^2}{a^2(t_1 - t_0)^2} + \frac{(y - y_1)^2}{a^2(t_1 - t_0)^2} + \frac{(z - z_1)^2}{b^2(t_1 - t_0)^2} = 1$$

ha per corrispondente la sfera

$$(x - \bar{x}_1)^2 + (y - \bar{y}_1)^2 + (z - \bar{z}_1)^2 = b^2(t_1 - t_0)^2,$$

e quindi

$$d\sigma_{t_1-t_0}^{(2)} = \frac{b^2(t_1 - t_0)}{a \sqrt{a^2(t_1 - t_0)^2 - r^2}} dx dy = \frac{b^2(t_1 - t_0)}{a R_a} dx dy.$$

Mentre

$$d\sigma_{t_1-t_0}^{(1)} = \frac{b(t_1 - t_0)}{\sqrt{b^2(t_1 - t_0)^2 - r^2}} dx dy = \frac{b(t_1 - t_0)}{R_b} dx dy,$$

avendo posto

$$R_a = \sqrt{a^2(t_1 - t_0)^2 - r^2}, \quad R_b = \sqrt{b^2(t_1 - t_0)^2 - r^2}.$$

Indichiamo con S_a , S_b rispettivamente i cerchi di centro (x_1, y_1) e di raggi $a(t_1 - t_0)$ e $b(t_1 - t_0)$. Allora, poichè φ e ψ non dipendono dalla coordinata z , possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi b^2(t_1 - t_0)} \int_{\sigma_{t_1-t_0}^{(2)}} \left\{ \varphi \sin \omega - \psi \cos \omega \right\}_{t_0} \sin \omega d\sigma_{t_1-t_0}^{(2)} &= \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int_{S_a} \frac{1}{R_a} \left\{ \varphi \sin \omega - \psi \cos \omega \right\}_{t_0} \sin \omega dx dy. \\ \frac{1}{4\pi b^2(t_1 - t_0)} \int_{\sigma_{t_1-t_0}^{(1)}} \left\{ \varphi \cos \omega + \psi \sin \omega \right\}_{t_0} \cos \omega d\sigma_{t_1-t_0}^{(1)} &= \\ &= \frac{1}{2\pi b} \int_{S_b} \frac{1}{R_b} \left\{ \varphi \cos \omega + \psi \sin \omega \right\}_{t_0} \cos \omega dx dy. \end{aligned}$$

Supposto, per fissare le idee, $b > a$, per l'integrale di volume si ha

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{4\pi b} \int_{S_{t_1-t_0}} \left\{ \varphi \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \psi \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} \right\}_{t_0} dS_{t_1-t_0} = \\ & - \frac{1}{2\pi b} \int_{S_a} \left(\varphi \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \psi \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} \right)_{t_0} dx dy \int_{z_1 + \sqrt{b^2(t_1-t_0)^2 - r^2}}^{z_1 + \sqrt{b^2(t_1-t_0)^2 - r^2}} dz + \\ & + \int_{S_b - S_a} \left(\varphi \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \psi \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} \right)_{t_0} dx dy \int_{z_1}^{z_1 + \sqrt{b^2(t_1-t_0)^2 - r^2}} dz. \end{aligned}$$

Con ovvie riduzioni l'integrale in discorso si trova eguale a

$$-\frac{b^2-a^2}{2\pi ab} \int_{S_a} \frac{r^2}{aR_b+bR_a} \left\{ \varphi \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \psi \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} \right\}_{t_0} dx dy -$$

$$-\frac{1}{2\pi b} \int_{S_b-S_a} R_b \left\{ \varphi \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \psi \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} \right\}_{t_0} dx dy,$$

dove S_b-S_a rappresenta la corona determinata dai cerchi S_b, S_a .

In virtù delle formule ora trovate, possiamo scrivere

$$(12) \quad \omega_x[\varphi, \psi]_{t_0} = \frac{1}{2\pi a} \int_{S_a} \frac{1}{R_a} \left\{ \varphi \sin \omega - \psi \cos \omega \right\}_{t_0} \sin \omega dx dy +$$

$$+ \frac{1}{2\pi b} \int_{S_b} \frac{1}{R_b} \left\{ \varphi \cos \omega + \psi \sin \omega \right\}_{t_0} \cos \omega dx dy -$$

$$-\frac{b^2-a^2}{2\pi ab} \int_{S_a} \frac{r^2}{aR_b+bR_a} \left\{ \varphi \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \psi \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} \right\}_{t_0} dx dy -$$

$$-\frac{1}{2\pi b} \int_{S_b-S_a} R_b \left\{ \varphi \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \psi \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} \right\}_{t_0} dx dy.$$

Un analogo calcolo applicato alle formule che danno $\omega_y[\varphi, \psi]_{t_0}$, conduce ai seguenti risultati:

$$(13) \quad \omega_y[\varphi, \psi]_{t_0} = \frac{1}{2\pi a} \int_{S_a} \frac{1}{R_a} \left\{ \psi \cos \omega - \varphi \sin \omega \right\}_{t_0} \cos \omega dx dy +$$

$$+ \frac{1}{2\pi b} \int_{S_b} \frac{1}{R_b} \left\{ \varphi \cos \omega + \psi \sin \omega \right\}_{t_0} \sin \omega dx dy -$$

$$-\frac{b^2-a^2}{2\pi ab} \int_{S_a} \frac{r^2}{aR_b+bR_a} \left\{ \varphi \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} + \psi \frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2} \right\}_{t_0} dx dy -$$

$$-\frac{1}{2\pi b} \int_{S_b-S_a} R_b \left\{ \varphi \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} + \psi \frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2} \right\}_{t_0} dx dy,$$

$$(14) \quad \omega_z[\varphi]_{t_0} = \frac{1}{2\pi a} \int_{S_a} \frac{1}{R_a} \varphi_{t_0} dx dy.$$

I secondi membri delle formule (12), (13), (14) sono manifestamente indipendenti da z_1 . Ne consegue che nelle ipotesi dichiarate in precedenza relativamente alle funzioni X , Y , Z e alle condizioni iniziali, i secondi membri delle tue formule (8), (9) non dipenderanno dalla variabile z_1 , e pertanto esse danno le formule di rappresentazione degli integrali delle equazioni delle membrane elastiche

.